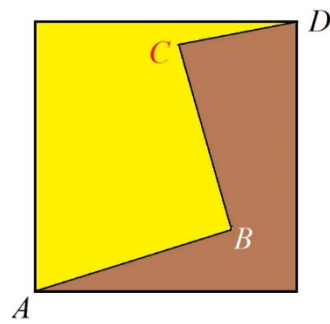


**Олимпиада школьников «Ломоносов»
по механике и математическому моделированию**

Задания заключительного этапа 2023/2024 учебного года для 9 – 10 классов

Вариант 24-910

1. Гаврила, сбегая вниз по движущемуся вверх эскалатору, насчитал 60 ступенек. Глафира, шагая вверх по этому же эскалатору, насчитала 30 ступенек. Собственная скорость Гаврилы в три раза больше собственной скорости Глафиры. Сколько ступенек видно на эскалаторе в данный момент времени, если его скорость движения постоянна?
2. Стержень, постоянного сечения составлен из двух стержней, различной плотности. Слева стержень более легкий, справа более тяжелый. Плотности материалов относятся как 1:3. Длины левого и правого стержня относятся как 2:1. В каком отношении центр масс составного стержня делит его длину?
3. В озере плавает жмых в форме кубика массой 160 г. Ту часть кубика, которая находится под водой, начинает есть рыбка со скоростью 15 г в минуту. Одновременно с ней надводную часть начинает есть птичка со скоростью 5 г в минуту. Сколько грамм съест птичка? Плотность жмыха $0,6 \text{ г/см}^3$, плотность воды 1 г/см^3 .
4. Фермер приобрел квадратное поле, через которое проходит узкая тропинка. Осматривая поле, он прошел по участку AB за 15 минут, затем свернул под прямым углом налево и прошел по участку BC за 8 минут. После этого он свернул под прямым углом направо и прошел по участку CD за 6 минут. Всё это время он шел с постоянной скоростью 3 км/час. Он решил, что на верхней части поля (окрашена светлым) он посадит дыни, которые в этих краях дают урожайность 300 ц/га, и которые можно продать по цене 4 тыс. руб./ц. На нижней части поля (окрашена темным) он посадит арбузы, урожайность которых 400 ц/га, цена продажи – 3 тыс. руб./ц. Определите суммарную выручку фермера.
5. Космический аппарат обнаружил систему из двух звезд Alpha и Beta, расстояние между которыми $2L$ не меняется со временем и поблизости от которых нет других массивных объектов. Были измерены действующие на аппарат со стороны звезд суммарные силы в двух разных точках прямой, проходящей через эти звезды:
 - когда аппарат находился на равном расстоянии от этих двух звезд;
 - когда аппарат находился на расстоянии L от звезды Alpha.Отношение первой суммарной силы ко второй оказалось равно n .



А) Найдите отношение массы звезды Alpha к массе звезды Beta, если $n=1/2$.

Б) Определите возможные значения отношения масс этих двух звезд для каждого неотрицательного значения n .

18 февраля 2024 г.

Решение.

1. Ответ: 7,5.

Пусть собственная скорость катера и скорость течения реки равны соответственно x км/ч и y км/ч. Если плот преодолеет расстояние S км между пристанями A и B за t часов, то

$$ty = (t - 6)(x + y) = (t - 5)(x - y) \Rightarrow \frac{x + y}{y} = \frac{t}{t - 6} \text{ и } \frac{x - y}{y} = \frac{t}{t - 5}.$$

Тогда

$$2 = \frac{x + y}{y} - \frac{x - y}{y} = \frac{t}{t - 6} - \frac{t}{t - 5} \Rightarrow 2(t - 5)(t - 6) = t.$$

Из последнего квадратного уравнения получаем $t = 4$ или $t = \frac{15}{2}$. По условию задачи $t > 6$, поэтому $t = \frac{15}{2} = 7,5$ (часов).

2. Ответ: 19: 11.

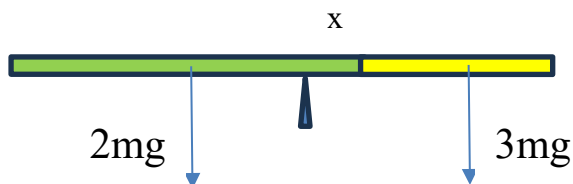
Из условия задачи следует, что длина l более плотного стержня в 2 раза меньше, чем длина менее плотного стержня, а плотность легкого стержня ρ в три раза меньше плотности тяжелого. Из этих условий получим соотношение масс стержней $(2l \cdot \rho) : (l \cdot 3\rho) = 2:3$. Из условия равновесия будем иметь

$$2mg(l - x) = 3mg\left(\frac{l}{2} + x\right) \Rightarrow 2(l - x) = 3\left(\frac{l}{2} + x\right) \Rightarrow x = \frac{l}{10}$$

Тогда отношение частей составного стержня слева и справа от центра масс будет равно

$$(2l - l/10) : \left(l + \frac{l}{10}\right) = \frac{19}{10} : \frac{11}{10} = 19: 11$$

Ответ: 19: 11



3. Ответ: 40 г.

Пока жмых не съели полностью, часть его будет находиться под водой, а часть над водой (при этом не имеет значения, в какой пропорции). Поэтому рыбка и птичка закончат есть одновременно. За это время рыбка съест $\frac{15}{15+5} \cdot 160 = 120$ г, а птичка $\frac{5}{15+5} \cdot 160 = 40$ г.

Численные значения плотностей здесь роли не играют.

4. Ответ: 75,75 млн. руб.

Длины участков AB , BC и CD (они получаются умножением скорости на соответствующее время) равны соответственно $3 \cdot \frac{15}{60} = \frac{3}{4}$ км = 750 м, $3 \cdot \frac{8}{60} = 0,4$ км = 400 м, $3 \cdot \frac{6}{60} = 0,3$ км = 300 м.

Продолжим параллельные прямые AB и CD и проведем перпендикулярные им линии через точки A и D . В результате получим прямоугольник с диагональю AD . Стороны прямоугольника равны $750 + 300 = 1050$ м и 400 м. Затем по теореме Пифагора находим: $AD^2 = 1050^2 + 400^2 = 1\,262\,500$. Поскольку квадрат диагонали равен удвоенной площади квадратного поля, то площадь поля равна $631\,250$ кв. м. = 63,125 га.

Дыни приносят по $300 \cdot 4 = 1200$ тыс. руб. с гектара. Так как и $400 \cdot 3 = 1200$, то арбузы с гектара приносят такую же выручку, что и дыни. Поэтому суммарная выручка фермера равна $63,125 \cdot 1200 = 75\,750$ тыс. руб. = 75,75 млн. руб.

5. Ответ: А) $\frac{17}{27}$ или $\frac{19}{9}$.

Б) $\frac{9-n}{9n+9}$, если $n \in \{0\} \cup [1; 9)$;

$\frac{9-n}{9n+9}$ или $\frac{9+n}{9-9n}$, если $n \in (0; 1)$;

ситуация невозможна, если $n \geq 9$.

Решение. В первом случае силы притяжения действуют в разные стороны и датчики фиксируют величину:

$$F_1 = G (m |M_A - M_B|) / L^2,$$

где m – масса аппарата, M_A, M_B – массы звезд.

Во втором случае

$$F_2 = G \frac{m}{L^2} (M_A + M_B/9).$$

По условию

$$n = \frac{|M_A - M_B|}{M_A + \frac{M_B}{9}} = \frac{(|x-1|)}{(x+\frac{1}{9})} = \frac{(9|x-1|)}{(9x+1)}, \text{ где } x = \frac{M_A}{M_B} > 0, n \geq 0.$$

Если $0 < x < 1$, то имеем уравнение $9nx + n = 9 - 9x$, и $x = \frac{9-n}{9n+9}$. Это решение имеет смысл, если $0 < n < 9$.

Если $x \geq 1$, то имеем уравнение $9nx + n = 9x - 9$, и $x = \frac{9+n}{9-9n}$.

Это решение имеет смысл, если $0 < n < 1$.

Таким образом, если $n \geq 9$, то ситуация невозможна;

если $1 \leq n < 9$, то отношение масс находится однозначно и равно $\frac{9-n}{9n+9}$;

если $0 \leq n < 1$, то имеется два решения $\frac{9-n}{9n+9}$ и $\frac{9+n}{9-9n}$. Они совпадают, если $n = 0$.