

9-10 классы

Внимание! При вычислениях считать **ускорение свободного падения** $g = 10 \text{ м/с}^2$,
универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$.

Везде, где не сказано иное, ответы давать **в единицах СИ**, при необходимости **округлив до сотых**.

Каждое задание оценивается в 20 баллов.

1. Андрей и Борис участвуют в велосипедных гонках на трассе длиной 40 км. Они стартуют на противоположных концах трассы и едут навстречу друг другу, каждый должен проехать всю трассу 40 км. Борис едет в два раза быстрее Андрея, и расстояние между ними сокращается со скоростью 1 км/мин. Но через 5 минут после начала движения, из-за большой скорости, у велосипеда Бориса рвется цепь, он вынужден остановиться и ждать Андрея, у которого есть велосипедная аптечка.

За сколько минут в итоге преодолеет всю трассу Борис, если после прибытия Андрея ему еще нужно потратить 10 минут на ремонт, а затем он поедет с той же скоростью, как и в начале пути, и ничего больше не сломается? При необходимости ответ округлите до сотых.

{175}

2. Материальная точка движется на плоскости так, что проекции ее скорости (V_x, V_y) на оси ортогональной системы координат OXY меняются со временем t по закону

$$\begin{cases} V_x = 2 - 3t \\ V_y = 3 \end{cases}$$

Найдите длину вектора перемещения материальной точки за первые две секунды от начала движения. Все значения даны в единицах СИ. При необходимости округлите ответ до сотых.

{6,32}

3. В теплоизолированном сосуде находится 100 г воды при $t = 0^\circ\text{C}$. Из сосуда выкачивали воздух до тех пор, пока в сосуде не осталось воды. Найдите массу льда в сосуде. Удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг, удельная теплота испарения воды 2480 кДж/кг. Ответ запишите в граммах. При необходимости округлите ответ до сотых.

{88,26}

4. Два самолета движутся на одной высоте по перпендикулярным курсам: первый – с запада на восток со скоростью 600 км/ч, второй – с юга на север со скоростью 800 км/ч. В момент связи с диспетчером оба самолета приближались к точке пересечения курсов: первому самолету оставалось пролететь до нее 40 км, а второму – 60 км. Чтобы убедиться, что полет безопасный, найдите минимальное в течение ближайшего часа расстояние между самолетами в километрах. При необходимости округлите ответ до сотых.

{4}

5. Перед Новым годом живущие по соседству Гаврила и Глафира повесили на своих домах электрогирлянды. 31 декабря они договорились, что каждый из них включит свою гирлянду один раз в случайный момент времени между 19:00 и полночью. При этом у Глафиры таймер отключает гирлянду через 90 минут, а у Гаврилы – через 120 минут. В этот день их сосед в какой-то момент времени заметил, что обе гирлянды включены. Пусть $\frac{p}{q}$ (где p и q – взаимно простые натуральные числа) – вероятность того, что в 22:00 обе гирлянды включены. Найдите $p + q$.

{139}

Решения

1. Поскольку скорость Бориса в 2 раза превышает скорость Андрея, а расстояние между ними уменьшается со скоростью 1 км/мин, то скорость Бориса равна $2/3$ км/мин, а Андрея $1/3$ км/мин.

Значит, если бы не было остановок, Борис проехал бы трассу за $\frac{40}{2/3} = 60$ минут.

Это время вырастет на время ожидания приезда аптечки + время ремонта (10 минут).

Так как за 5 минут расстояние между ними уменьшилось на 5 км, то с момента поломки до встречи с Борисом Андрей проедет 35 км, потратив на это $\frac{35}{1/3} = 105$ минут.

Таким образом, суммарное время Бориса равно $60 + 105 + 10 = 175$ минут.

2. По условию
$$\begin{cases} V_x = 2 - 3t \\ V_y = 3 \end{cases}$$

Поэтому
$$\begin{cases} S_x = 2t - \frac{3t^2}{2} \\ S_y = 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_x(0) = 0 \\ S_y(0) = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} S_x(2) = -2 \\ S_y(2) = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta S_x(0) = -2 \\ \Delta S_y(0) = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$|\Delta S| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \approx 6,32.$$

3. Внутренняя энергия содержимого сосуда не меняется. Значит часть воды испарится, и за счет этого другая часть превратится в лед:

$$\begin{aligned} x \cdot 330 &= (100 - x) \cdot 2480 \Rightarrow x(330 + 2480) = 248000 \\ &\Rightarrow x = 88,256 \dots \approx 88,3. \end{aligned}$$

4. В системе отсчета, связанной с первым самолетом, первый самолет покоится, а второй движется прямолинейно. Относительная скорость второго самолета

относительно первого равна $\sqrt{600^2 + 800^2} = 1000$ км/ч и направлена на северо-запад под углом α к линии восток запад: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{800}{600} = \frac{4}{3}$.

В этой системе отсчета второй самолет пересечет линию курса первого самолета на расстоянии 45 километров от точки пересечения курсов самолетов.

Минимальное расстояние между самолетами равно:

$$h = |45 - 40| \cdot \sin \alpha = 5 \cdot \frac{4}{5} = 4 \text{ км.}$$

5. Отложим по горизонтальной оси время X , когда включается гирлянда у Глафиры, а по вертикальной оси – время Y , когда включается гирлянда у Гаврилы. При этом время 19:00 это начало координат $(0, 0)$. Переведем все заданное время в часы.

Так как в течение этих 5 часов с 19:00 до 24:00 был момент, что обе гирлянды включены, то Гаврила включил гирлянду не позже, чем через 1,5 часа после Глафиры, а Глафира – не позже, чем через 2 часа после Гаврилы:

$$Y \leq X + 1,5, X \leq Y + 2.$$

Эта область (полоса внутри квадрата) закрашена на рисунке желтым цветом.

Если в 22:00 обе гирлянды были включены, то

$$1,5 \leq Y \leq 3, 1 \leq X \leq 3.$$

Эта область – красный прямоугольник на рисунке.

Площадь желтой области есть

$$25 - \frac{1}{2} \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} 3^2 = 25 - \frac{49}{8} - \frac{9}{2} = \frac{115}{8}.$$

Площадь красного прямоугольника равна

$$1,5 \cdot 2 = 3.$$

Искомая вероятность есть

$$\frac{3}{115/8} = \frac{24}{115}.$$

Таким образом, $p = 24, q = 115, p + q = 139$.

