

## 11 классы

**Внимание!** При вычислениях считать ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ , универсальная газовая постоянная  $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ .

Везде, где не сказано иное, ответы давать **в единицах СИ**, при необходимости **округлив до сотых**.

Задания 1 – 4 оцениваются в 16 баллов каждое, задания 5-6 – в 18 баллов каждое.

**1-1.** Андрей и Борис участвуют в велосипедных гонках на трассе длиной 40 км.

Они стартуют на противоположных концах трассы и едут навстречу друг другу, каждый должен проехать всю трассу 40 км. Борис едет в два раза быстрее Андрея, и расстояние между ними сокращается со скоростью 1 км/мин. Но через 5 минут после начала движения, из-за большой скорости, у велосипеда Бориса рвется цепь, он вынужден остановиться и ждать Андрея, у которого есть велосипедная аптечка.

За сколько минут в итоге преодолеет всю трассу Борис, если после прибытия Андрея ему еще нужно потратить 10 минут на ремонт, а затем он поедет с той же скоростью, как и в начале пути, и ничего больше не сломается? При необходимости ответ округлите до сотых.

{175}

**1-2.** Андрей и Борис участвуют в велосипедных гонках на трассе длиной 40 км.

Они стартуют на противоположных концах трассы и едут навстречу друг другу, каждый должен проехать всю трассу 40 км. Борис едет в два раза быстрее Андрея, и расстояние между ними сокращается со скоростью 1 км/мин. Но через 5 минут после начала движения, из-за большой скорости, у велосипеда Бориса рвется цепь, он вынужден остановиться и ждать Андрея, у которого есть велосипедная аптечка.

За сколько минут в итоге преодолет всю трассу Борис, если после прибытия Андрея ему еще нужно потратить 8 минут на ремонт, а затем он поедет с той же скоростью, как и в начале пути, и ничего больше не сломается? При необходимости ответ округлите до сотых.

{173}

**1-3.** Андрей и Борис участвуют в велосипедных гонках на трассе длиной 40 км. Они стартуют на противоположных концах трассы и едут навстречу друг другу, каждый должен проехать всю трассу 40 км. Борис едет в два раза быстрее Андрея, и расстояние между ними сокращается со скоростью 1 км/мин. Но через 5 минут после начала движения, из-за большой скорости, у велосипеда Бориса рвется цепь, он вынужден остановиться и ждать Андрея, у которого есть велосипедная аптечка.

За сколько минут в итоге преодолет всю трассу Борис, если после прибытия Андрея ему еще нужно потратить 15 минут на ремонт, а затем он поедет с той же скоростью, как и в начале пути, и ничего больше не сломается? При необходимости ответ округлите до сотых.

{180}

**1-4.** Андрей и Борис участвуют в велосипедных гонках на трассе длиной 40 км. Они стартуют на противоположных концах трассы и едут навстречу друг другу, каждый должен проехать всю трассу 40 км. Борис едет в два раза быстрее Андрея, и расстояние между ними сокращается со скоростью 1 км/мин. Но через 5 минут после начала движения, из-за большой скорости, у велосипеда Бориса рвется цепь, он вынужден остановиться и ждать Андрея, у которого есть велосипедная аптечка.

За сколько минут в итоге преодолеет всю трассу Борис, если после прибытия Андрея ему еще нужно потратить 7 минут на ремонт, а затем он поедет с той же скоростью, как и в начале пути, и ничего больше не сломается? При необходимости ответ округлите до сотых.

{172}

**2-1.** Материальная точка движется на плоскости так, что проекции ее скорости  $(V_x, V_y)$  на оси ортогональной системы координат  $OXY$  меняются со временем  $t$  по закону

$$\begin{cases} V_x = 2 - 3t \\ V_y = 3 \end{cases}$$

Найдите длину вектора перемещения материальной точки за первые две секунды от начала движения. Все значения даны в единицах СИ. При необходимости округлите ответ до сотых.

$\{2\sqrt{10} \approx 6,32\}$

**2-2.** Материальная точка движется на плоскости так, что проекции ее скорости  $(V_x, V_y)$  на оси ортогональной системы координат  $OXY$  меняются со временем  $t$  по закону

$$\begin{cases} V_x = 3 - 5t \\ V_y = 2 \end{cases}$$

Найдите длину вектора перемещения материальной точки за первые две секунды от начала движения. Все значения даны в единицах СИ. При необходимости округлите ответ до сотых.

$\{4\sqrt{2} \approx 5,66\}$

**2-3.** Материальная точка движется на плоскости так, что проекции ее скорости  $(V_x, V_y)$  на оси ортогональной системы координат  $OXY$  меняются со временем  $t$  по закону

$$\begin{cases} V_x = 3 - t \\ V_y = -3 \end{cases}$$

Найдите длину вектора перемещения материальной точки за первые две секунды от начала движения. Все значения даны в единицах СИ. При необходимости округлите ответ до сотых.

$$\{2\sqrt{13} \approx 7,21\}$$

**2-4.** Материальная точка движется на плоскости так, что проекции ее скорости  $(V_x, V_y)$  на оси ортогональной системы координат  $OXY$  меняются со временем  $t$  по закону

$$\begin{cases} V_x = 2 - 3t \\ V_y = -2 \end{cases}$$

Найдите длину вектора перемещения материальной точки за первые две секунды от начала движения. Все значения даны в единицах СИ. При необходимости округлите ответ до сотых.

$$\{2\sqrt{5} \approx 4,47\}$$

**3-1.** В теплоизолированном сосуде находится 100 г воды при  $t = 0^\circ\text{C}$ . Из сосуда выкачивали воздух до тех пор, пока в сосуде не осталось воды. Найдите массу льда в сосуде. Удельная теплота плавления льда  $330 \text{ кДж/кг}$ ,

удельная теплота испарения воды 2480 кДж/кг. Ответ запишите в граммах.

При необходимости округлите ответ до сотых.

{88,26}

**3-2.** В теплоизолированном сосуде находится 150 г воды при  $t = 0^\circ\text{C}$ . Из сосуда выкачивали воздух до тех пор, пока в сосуде не осталось воды. Найдите массу льда в сосуде. Удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг, удельная теплота испарения воды 2480 кДж/кг. Ответ запишите в граммах. При необходимости округлите ответ до сотых.

{132,38}

**3-3.** В теплоизолированном сосуде находится 200 г воды при  $t = 0^\circ\text{C}$ . Из сосуда выкачивали воздух до тех пор, пока в сосуде не осталось воды. Найдите массу льда в сосуде. Удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг, удельная теплота испарения воды 2480 кДж/кг. Ответ запишите в граммах. При необходимости округлите ответ до сотых.

{176,51}

**3-4.** В теплоизолированном сосуде находится 50 г воды при  $t = 0^\circ\text{C}$ . Из сосуда выкачивали воздух до тех пор, пока в сосуде не осталось воды. Найдите массу льда в сосуде. Удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг, удельная теплота испарения воды 2480 кДж/кг. Ответ запишите в граммах. При необходимости округлите ответ до сотых.

{44,13}

**4-1.** Два самолета движутся на одной высоте по перпендикулярным курсам:

первый – с запада на восток со скоростью 500 км/ч, второй – с юга на север со скоростью 1000 км/ч. В момент связи с диспетчером оба самолета приближались к точке пересечения курсов: первому самолету оставалось пролететь до нее 30 км, а второму – 55 км. Чтобы убедиться, что полет безопасный, найдите минимальное в течение ближайшего часа расстояние между самолетами в километрах. При необходимости округлите ответ до сотых.

{2,24}

**4-2.** Два самолета движутся на одной высоте по перпендикулярным курсам:

первый – с запада на восток со скоростью 1000 км/ч, второй – с юга на север со скоростью 500 км/ч. В момент связи с диспетчером оба самолета приближались к точке пересечения курсов: первому самолету оставалось пролететь до нее 58 км, а второму – 32 км. Чтобы убедиться, что полет безопасный, найдите минимальное в течение ближайшего часа расстояние между самолетами в километрах. При необходимости округлите ответ до сотых.

{2,68}

**4-3.** Два самолета движутся на одной высоте по перпендикулярным курсам:

первый – с запада на восток со скоростью 400 км/ч, второй – с юга на север со скоростью 800 км/ч. В момент связи с диспетчером оба самолета приближались к точке пересечения курсов: первому самолету оставалось

пролететь до нее 34 км, а второму – 60 км. Чтобы убедиться, что полет безопасный, найдите минимальное в течение ближайшего часа расстояние между самолетами в километрах. При необходимости округлите ответ до сотых.

{3,58}

**4-4.** Два самолета движутся на одной высоте по перпендикулярным курсам: первый – с запада на восток со скоростью 900 км/ч, второй – с юга на север со скоростью 450 км/ч. В момент связи с диспетчером оба самолета приближались к точке пересечения курсов: первому самолету оставалось пролететь до нее 65 км, а второму – 33 км. Чтобы убедиться, что полет безопасный, найдите минимальное в течение ближайшего часа расстояние между самолетами в километрах. При необходимости округлите ответ до сотых.

{0,45}

**5-1.** Перед Новым годом живущие по соседству Гаврила и Глафира повесили на своих домах электрогирлянды. 31 декабря они договорились, что каждый из них включит свою гирлянду один раз в случайный момент времени между 19:00 и полночью. При этом у Глафиры таймер отключает гирлянду через 90 минут, а у Гаврилы – через 120 минут. В этот день их сосед в какой-то момент времени заметил, что обе гирлянды включены. Пусть  $\frac{p}{q}$  (где  $p$  и  $q$  – взаимно простые натуральные числа) – вероятность того, что в 22:00 обе гирлянды включены. Найдите  $p + q$ .

{139}

**5-2.** Перед Новым годом живущие по соседству Гаврила и Глафира повесили на своих домах электрогирлянды. 31 декабря они договорились, что каждый из них включит свою гирлянду один раз в случайный момент времени между 19:00 и полночью. При этом у Глафиры таймер отключает гирлянду через 90 минут, а у Гаврилы – через 120 минут. В этот день их сосед в какой-то момент времени заметил, что обе гирлянды включены. Пусть  $\frac{p}{q}$  (где  $p$  и  $q$  – взаимно простые натуральные числа) – вероятность того, что в 21:00 обе гирлянды включены. Найдите  $p + q$ .

{139}

**5-3.** Перед Новым годом живущие по соседству Гаврила и Глафира повесили на своих домах электрогирлянды. 31 декабря они договорились, что каждый из них включит свою гирлянду один раз в случайный момент времени между 19:00 и полночью. При этом у Глафиры таймер отключает гирлянду через 90 минут, а у Гаврилы – через 120 минут. В этот день их сосед в какой-то момент времени заметил, что обе гирлянды включены. Пусть  $\frac{p}{q}$  (где  $p$  и  $q$  – взаимно простые натуральные числа) – вероятность того, что в полночь обе гирлянды включены. Найдите  $p + q$ .

{139}

**5-4.** Перед Новым годом живущие по соседству Гаврила и Глафира повесили на своих домах электрогирлянды. 31 декабря они договорились, что каждый из них включит свою гирлянду один раз в случайный момент времени между 19:00 и полночью. При этом у Глафиры таймер отключает гирлянду через



90 минут, а у Гаврилы – через 120 минут. В этот день их сосед в какой-то момент времени заметил, что обе гирлянды включены. Пусть  $\frac{p}{q}$  (где  $p$  и  $q$  – взаимно простые натуральные числа) – вероятность того, что в 23:00 обе гирлянды включены. Найдите  $p + q$ .

{139}

**6-1.** Однородное цилиндрическое бревно с сечением радиуса 10 см расположено горизонтально в воде так, что верхняя точка возвышается над поверхностью воды на 16 см. Найдите период малых колебаний бревна, которому сообщили небольшой толчок в вертикальном направлении. Ответ дайте в секундах, при необходимости округлив до десятых. Инерцией жидкости пренебречь.

{0,3}.

**6-2.** Однородное цилиндрическое бревно с сечением радиуса 10 см расположено горизонтально в воде так, что верхняя точка возвышается над поверхностью воды на 14 см. Найдите период малых колебаний бревна, которому сообщили небольшой толчок в вертикальном направлении. Ответ дайте в секундах, при необходимости округлив до десятых. Инерцией жидкости пренебречь.

{0,4}.

## Решения

1. Поскольку скорость Бориса в 2 раза превышает скорость Андрея, а расстояние между ними уменьшается со скоростью 1 км/мин, скорость Бориса равна  $\frac{2}{3}$  км/мин, а Андрея  $\frac{1}{3}$  км/мин.

Значит, если бы не было остановок, Борис проехал бы трассу за  $\frac{40}{\frac{2}{3}} = 60$  минут.

Это время вырастет на время ожидания приезда аптечки + время ремонта (10 минут).

Так как за 5 минут расстояние между ними уменьшилось на 5 км, то с момента поломки до встречи с Борисом Андрей проедет 35 км, потратив на это  $\frac{35}{\frac{1}{3}} = 105$  минут.

Таким образом, суммарное время Бориса равно  $60 + 105 + 10 = 175$  минут.

2. По условию 
$$\begin{cases} V_x = 2 - 3t \\ V_y = 3 \end{cases}$$

Поэтому 
$$\begin{cases} S_x = 2t - \frac{3t^2}{2} \\ S_y = 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_x(0) = 0 \\ S_y(0) = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} S_x(2) = -2 \\ S_y(2) = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta S_x(0) = -2 \\ \Delta S_y(0) = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$|\Delta S| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \approx 6,32.$$

3. Внутренняя энергия содержимого сосуда не меняется. Значит часть воды испарится, и за счет этого другая часть превратится в лед:

$$\begin{aligned} x \cdot 330 &= (100 - x) \cdot 2480 \Rightarrow x(330 + 2480) = 248000 \\ &\Rightarrow x = 88,256 \dots \approx 88,3. \end{aligned}$$

4. Скорость первого самолета  $V$ , а скорость второго –  $U$ . Относительная скорость второго самолета относительно первого равна  $\sqrt{V^2 + U^2}$  км/ч и направлена на северо-запад под углом  $\alpha$  к линии восток запад:  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{U}{V}$ .

В системе отсчета, связанной с первым самолетом, первый самолет покоится, а второй – движется прямолинейно. Он пересечет линию курса первого самолета на расстоянии  $\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$  километров от точки пересечения курсов самолетов. Минимальное расстояние между самолетами равно:

$$h = \left( \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha} - b \right) \sin \alpha.$$

Ответы в разных вариантах:

4.1)  $\frac{5}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 2,24$  км; 4.2)  $6 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 2,68$ ; 4.3)  $4 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 3,58$ ; 4.4)  $1 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,45$ .

5. Отложим по горизонтальной оси время  $X$ , когда включается гирлянда у Глафиры, а по вертикальной оси – время  $Y$ , когда включается гирлянда у Гаврилы. При этом время 19:00 это начало координат  $(0, 0)$ . Переведем все заданное время в часы.

Так как в течение этих 5 часов с 19:00 до 24:00 был момент, что обе гирлянды включены, то Гаврила включил гирлянду не позже, чем через 1,5 часа после Глафиры, а Глафира – не позже, чем через 2 часа после Гаврилы:

$$Y \leq X + 1,5, X \leq Y + 2.$$

Эта область (полоса внутри квадрата) закрашена на рисунке желтым цветом.

Если в 22:00 обе гирлянды были включены, то

$$1,5 \leq Y \leq 3, 1 \leq X \leq 3.$$

Эта область – красный прямоугольник на рисунке.

Площадь желтой области есть

$$25 - \frac{1}{2} \left( \frac{7}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} 3^2 = 25 - \frac{49}{8} - \frac{9}{2} = \frac{115}{8}.$$

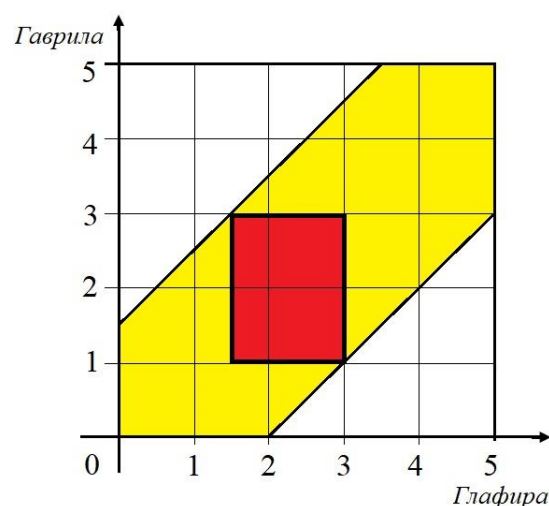
Площадь красного прямоугольника равна

$$1,5 \cdot 2 = 3.$$

Искомая вероятность есть

$$\frac{3}{115/8} = \frac{24}{115}.$$

Таким образом,  $p = 24, q = 115, p + q = 139$ .



6. Пусть  $L$  – длина бревна,  $a$  – радиус бревна,  $h$  – высота выступающей из воды части бревна,  $\rho_0$  – плотность воды,  $\rho$  – плотность бревна. Тогда  $S_0 = \pi a^2$  – площадь сечения бревна,  $l = 2\sqrt{a^2 - (h - a)^2}$  – длина хорды по поверхности воды. Вычислим площадь сечения бревна под водой. Необходимо вычислить площадь  $S$  сегмента высотой  $h$ , ограниченного хордой длины  $l$ . Эту площадь можно представить разностью площадей сектора и равнобедренного треугольника с вершиной в центре сечения бревна, в котором радиусы направлены под углом  $\alpha$ :

$$S = \frac{a^2}{2} \cdot (\alpha - \sin \alpha) = \frac{a^2}{2} \cdot \left( 2 \arccos \frac{h-a}{a} - \sin \left( 2 \arccos \frac{h-a}{a} \right) \right)$$

Из условия плавания бревна  $S_0 L \rho = S L \rho_0$  можно вычислить отношение плотности воды и бревна  $\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{S}{S_0}$

Пусть  $x$  – малое вертикальное отклонение бревна от положения равновесия. Согласно второму закону Ньютона

$$\rho S_0 L \ddot{x} = -x l L \rho_0 g,$$

$$\ddot{x} + \frac{\rho_0}{\rho} \cdot \frac{g l}{S_0} x = 0.$$

В результате приходим к уравнению гармонических колебаний:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \omega = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho} \cdot \frac{g l}{S_0}} = \sqrt{\frac{S_0}{S} \cdot \frac{g l}{S_0}} = \sqrt{\frac{g l}{S}}$$

Получаем  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{S}{g l}}$

1.  $a = 0.1$  м,  $h = 0.16$  м,  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Тогда  $T \approx 0,3$  с

2.  $a = 0.1$  м,  $h = 0.14$  м,  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Тогда  $T \approx 0,4$  с