

7-8 классы

Внимание! При вычислениях считать **ускорение свободного падения** $g = 10 \text{ м/с}^2$.
Везде, где не сказано иное, ответы давать **в единицах СИ**, при необходимости **округлив до сотых**.

Каждое задание оценивается в 20 баллов.

1. В лаборатории необходимо получить 8 литров воды с температурой 31°C , смешивая холодную водопроводную воду с температурой 19°C и горячую – с температурой 67°C . Сколько литров горячей воды надо взять? Ответ при необходимости округлите до сотых.

{2}

2. Андрей и Борис участвуют в велосипедных гонках на трассе длиной 40 км. Они стартуют на противоположных концах трассы и едут навстречу друг другу, каждый должен проехать всю трассу 40 км. Борис едет в два раза быстрее Андрея, и расстояние между ними сокращается со скоростью 1 км/мин. Но через 5 минут после начала движения, из-за большой скорости, у велосипеда Бориса рвется цепь, он вынужден остановиться и ждать Андрея, у которого есть велосипедная аптечка.

За сколько минут в итоге преодолеет всю трассу Борис, если после прибытия Андрея ему еще нужно потратить 10 минут на ремонт, а затем он поедет с той же скоростью, как и в начале пути, и ничего больше не сломается? При необходимости ответ округлите до сотых.

{175}

3. Материальная точка движется вдоль оси OX так, что ее координата x меняется со временем t по закону

$$x = 2 + 2t - \frac{3t^2}{2}.$$

Найдите путь, который материальная точка проходит за первые две секунды от начала движения ($t = 0$). Все значения даны в единицах СИ. При необходимости округлите ответ до сотых.

{3,33}

4. Два самолета движутся на одной высоте по перпендикулярным курсам: первый – с запада на восток со скоростью 600 км/ч, второй – с юга на север со скоростью 800 км/ч. В момент связи с диспетчером оба самолета приближались к точке пересечения курсов: первому самолету оставалось пролететь до нее 40 км, а второму – 60 км. Чтобы убедиться, что полет безопасный, найдите минимальное в течение ближайшего часа расстояние между самолетами в километрах. При необходимости округлите ответ до сотых.

{4}

5. Перед Новым годом живущие по соседству Гаврила и Глафира повесили на своих домах электрогирлянды. 31 декабря они договорились, что каждый из них включит свою гирлянду один раз в случайный момент времени между 19:00 и полночью. При этом у Глафиры таймер отключает гирлянду через 90 минут, а у Гаврилы – через 120 минут. В этот день их сосед в какой-то момент времени заметил, что обе гирлянды включены. Пусть $\frac{p}{q}$ (где p и q – взаимно простые натуральные числа) – вероятность того, что в 22:00 обе гирлянды включены. Найдите $p + q$.

{139}

Решения

1. Из уравнения баланса тепла: $m_1 c(31 - 19) = m_2 c(67 - 31) \Rightarrow m_1 = 3m_2$. Так как, по условию, $m_1 + m_2 = 8$, то $m_2 = 2$ л.

2. Поскольку скорость Бориса в 2 раза превышает скорость Андрея, а расстояние между ними уменьшается со скоростью 1 км/мин, то скорость Бориса равна $2/3$ км/мин, а Андрея $1/3$ км/мин.

Значит, если бы не было остановок, Борис проехал бы трассу за $\frac{40}{2/3} = 60$ минут.

Это время вырастет на время ожидания приезда аптечки + время ремонта (10 минут).

Так как за 5 минут расстояние между ними уменьшилось на 5 км, то с момента поломки до встречи с Борисом Андрей проедет 35 км, потратив на это $\frac{35}{1/3} = 105$ минут.

Таким образом, суммарное время Бориса равно $60 + 105 + 10 = 175$ минут.

3. По условию $x = 2 + 2t - \frac{3t^2}{2}$. Вершина параболы: $t_B = \frac{2}{3}$; $x_B = \frac{8}{3}$.

Поэтому $x_0 = x(0) = 2$, $x_2 = x(2) = 0 \Rightarrow$

$$|S| = |x_B - x_0| + |x_B - x_2| = \frac{8}{3} - 2 + \frac{8}{3} = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3} \approx 3,33.$$

4. В системе отсчета, связанной с первым самолетом, первый самолет покоится, а второй движется прямолинейно. Относительная скорость второго самолета относительно первого равна $\sqrt{600^2 + 800^2} = 1000$ км/ч и направлена на северо-запад под углом α к линии восток запад: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{800}{600} = \frac{4}{3}$.

В этой системе отсчета второй самолет пересечет линию курса первого самолета на расстоянии 45 километров от точки пересечения курсов самолетов.

Минимальное расстояние между самолетами равно:

$$h = |45 - 40| \cdot \sin \alpha = 5 \cdot \frac{4}{5} = 4 \text{ км.}$$

5. Отложим по горизонтальной оси время X , когда включается гирлянда у Глафиры, а по вертикальной оси – время Y , когда включается гирлянда у Гаврилы. При этом время 19:00 это начало координат $(0, 0)$. Переведем все заданное время в часы.

Так как в течение этих 5 часов с 19:00 до 24:00 был момент, что обе гирлянды включены, то Гаврила включил гирлянду не позже, чем через 1,5 часа после Глафиры, а Глафира – не позже, чем через 2 часа после Гаврилы:

$$Y \leq X + 1,5, X \leq Y + 2.$$

Эта область (полоса внутри квадрата) закрашена на рисунке желтым цветом.

Если в 22:00 обе гирлянды были включены, то

$$1,5 \leq Y \leq 3, 1 \leq X \leq 3.$$

Эта область – красный прямоугольник на рисунке.

Площадь желтой области есть

$$25 - \frac{1}{2} \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} 3^2 = 25 - \frac{49}{8} - \frac{9}{2} = \frac{115}{8}.$$

Площадь красного прямоугольника равна

$$1,5 \cdot 2 = 3.$$

Искомая вероятность есть

$$\frac{3}{115/8} = \frac{24}{115}.$$

Таким образом, $p = 24, q = 115, p + q = 139$.

