

Решение.

1. Пусть собственная скорость лодки и скорость течения реки равны соответственно x км/ч и y км/ч. Если плот преодолел расстояние S км между пристанями A и B за t часов, то

$$ty = (t-6)(x+y) = (t-5)(x-y) \Rightarrow (x+y)/y = t/(t-6) \text{ и } (x-y)/y = t/(t-5).$$

$$\text{Тогда } 2 = (x+y)/y - (x-y)/y = t/(t-6) - t/(t-5) \Rightarrow 2(t-5)(t-4) = t.$$

Из последнего квадратного уравнения получаем $t = 4$ или $t = 15/2$. По условию задачи $t > 6$, поэтому $t = 15/2 = 7,5$ (часов).

Ответ. 7,5

2. Из закона сохранения энергии скорость при падении на пол будет равна: $V_2^2 = V_0^2 - 2gl\mu + 2gh \Rightarrow V_2 = 5$ м/с, $V_0 = 5$ м/с, $l = 2$ м, $h = 0,8$ м, $\mu = 0,4$. Падение без начальной скорости с высоты h занимает время $t = \sqrt{(2h/g)} = 0,4$ с. При этом скорость при падении будет равна $V_y = gt = 4$ м/с. Это значит, что брусок падает под углом α : $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Отсюда следует, что проекция скорости на горизонтальное направление будет равна $V_1 = V_2 \cdot \cos \alpha = 5 \cdot 3/5 = 3$ м/с. Таким образом, брусок улетит на расстояние $S = V_1 \cdot t = 1,2$ м. Остается найти гипотенузу: $\sqrt{1,2^2 + 0,8^2} \approx 1,44$

Ответ. 1,44 м

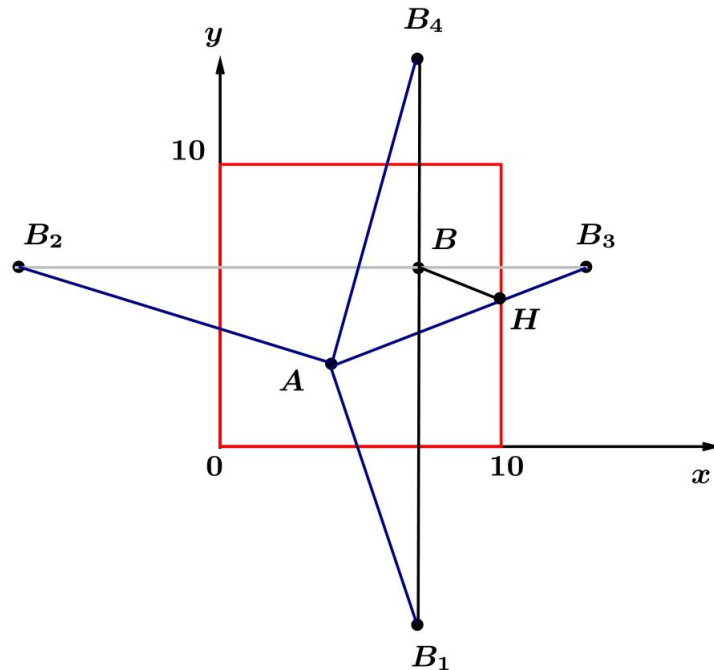
3. На скачивание $100 \div 35 = 65\%$ ролика потребовалось 35 секунд. Это означает, что весь ролик загружается $(35 \cdot 100)/65 = 700/13$ секунд. Так как в полдень до конца загрузки оставалось 13.

секунд, то загрузка началась за $700/13 - 13 = 531/13 = 4011/13$ секунд до полудня. Значит, Глафира начала скачивание ролика за 40 секунд плюс еще $11/13$ секунды до полудня. Тогда в момент начала скачивания часы показывали 11 часов 59 минут и 19 секунд.

За время $531/13$ секунд загружено 35 Мб, тогда за $700/13$ секунд (это время загрузки всего ролика) загрузится $(35 \cdot 700)/531 = 24500/531 = 4674/531 = 46,139359 \dots$ Мб.

Ответ. Объем ролика: 46,14 Мб; время на часах в момент начала загрузки: 11 : 59 : 19.

4. Спроектируем ситуацию на плоскость $z = 0$. Отразим точку B симметрично относительно стен комнаты, получим точки B_1, B_2, B_3 и B_4 (рис. 1).



Найдем расстояния AB_1, AB_2, AB_3, AB_4 .

$$AB_1^2 = (7-4)^2 + (-7-3)^2 = 9 + 100 = 109; AB_2^2 = (-7-4)^2 + (7-3)^2 = 121 + 16 = 137;$$

$$AB_3^2 = (13-4)^2 + (7-3)^2 = 81 + 16 = 97; AB_4^2 = (7-4)^2 + (13-3)^2 = 9 + 100 = 109.$$

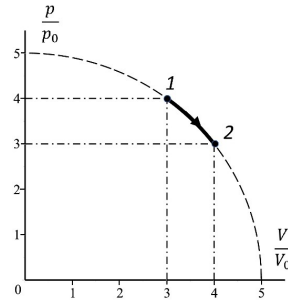
Так как наименьшим является $AB_3 = \sqrt{97}$, то кратчайший маршрут улитки состоит из отрезка длиной AH по потолку, спуска по вертикали в этой точке, отрезка длиной HB по полу. Длина маршрута составит $AH + HB = AB_3 = \sqrt{97}$ метров по потолку и по полу и 3 метра по вертикальной стене.

Время движения равно $\frac{\sqrt{97}}{1} + \frac{3}{2}$ минут.

Так как $9,8^2 = 96,04 < 97 < 97,0225 = 9,85^2$, то $\sqrt{97} + 1,5 \in (9,8 + 1,5; 9,85 + 1,5) = (11,3; 11,35)$. Значит, $\sqrt{97} + 1,5 \approx 11,3$.

Ответ. $\sqrt{97} + 1,5 \approx 11,3$ минуты.

5. С некоторым количеством идеального одноатомного газа совершается процесс 1 – 2, который в координатах $(\frac{V}{V_0}; \frac{P}{P_0})$ представляет собой дугу окружности (см. рис.). Найти $\frac{Q_1}{Q_2}$, где Q_1 – количество тепла, полученного газом в этом процессе, Q_2 – количество отданного.



Решение. Уравнение окружности $(\frac{P}{P_0})^2 + (\frac{V}{V_0})^2 = 5^2$, откуда следует

$$P = P_0 \sqrt{25 - (\frac{V}{V_0})^2}$$

На малом шаге процесса согласно первому закону термодинамики

$$\Delta Q = \Delta A + \Delta U = P \Delta V + \frac{3}{2} \nu R \Delta T = P \Delta V + \frac{3}{2} \Delta(PV) = P \Delta V + \frac{3}{2} \Delta(P \Delta V + V \Delta P) = \frac{5}{2} P \Delta V + \frac{3}{2} V \Delta P$$

Так как $\Delta P \approx P'(V) \Delta V$, где $P'(V)$ – производная функции $P(V)$, получаем

$$\Delta Q = \frac{1}{2} (5P(V) + 3VP'(V)) \Delta V = F(V) \Delta V, \text{ где } F(V) = \frac{1}{2} (5P(V) + 3VP'(V)) = -\frac{4P_0(V^2 - \frac{125}{8}V_0^2)}{\sqrt{25V_0^2 - V^2}}$$

Легко видеть, что $V_3 = \frac{5\sqrt{10}}{4}V_0 \in (3V_0; 4V_0)$ является корнем уравнения $F(V) = 0$, причем при $V \in [3V_0; V_3]$ имеем $F(V) > 0$, а при $V \in (V_3; 4V_0]$ выполнено $F(V) < 0$.

Таким образом, точка $(V_3; P_3) = \left(\frac{5\sqrt{10}}{4}V_0; \frac{5\sqrt{6}}{4}P_0\right)$ разделяет процесс на два участка. На первом из них, участке 1 – 3, газ тепло получает, а на втором участке 3 – 2 – отдает. Поэтому $Q_1 = Q_{13}$, $Q_2 = -Q_{23}$.
Далее, $Q_1 = A_{13} + \Delta U_{13}$.

Изменение внутренней энергии

$$\Delta U_{13} = \frac{3}{2} \nu R (T_3 - T_1) = \frac{3}{2} (P_3 V_3 - P_1 V_1) = \left(\frac{75\sqrt{15}}{16} - 18\right) P_0 V_0$$

Так как $P \Delta V = \left[\frac{P}{P_0} \Delta\left(\frac{V}{V_0}\right)\right] P_0 V_0$, работу газа на участке 1 – 3 можно найти по формуле $A_{13} = P_0 V_0 S_{13}$ – площадь фигуры, ограниченной прямыми $\frac{V}{V_0} = 3$, $\frac{V}{V_0} = \frac{5\sqrt{10}}{4}$, дугой окружности и осью абсцисс.

Нахождение этой площади не составляет труда:

$$S_{13} = \frac{25}{4} \left(2 \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) - 2 \arcsin\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right) + \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{24}{25}\right)$$

В результате получим

$$Q_1 = \frac{25}{4} \left(2 \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) - 2 \arcsin\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right) + \sqrt{15} - \frac{96}{25}\right) P_0 V_0$$

Аналогично находим

$$Q_2 = \frac{25}{4} \left(2 \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) - 2 \arcsin\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right) + \sqrt{15} - \frac{96}{25}\right) P_0 V_0$$

Итак,

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{2 \arcsin(\frac{4}{5}) - 2 \arcsin(\frac{\sqrt{6}}{4}) + \sqrt{15} - \frac{96}{25}}{2 \arcsin(\frac{3}{5}) - 2 \arcsin(\frac{\sqrt{6}}{4}) + \sqrt{15} - \frac{96}{25}} \approx 305$$

Ответ: $\frac{Q_1}{Q_2} \approx 305$

6. Решение. Направим ось x вниз по наклонной плоскости. Пусть $x(t)$ — закон движения центра колеса, причем $x(0) = 0$ (так выбрано начало координат) и $\dot{x}(0) = 0$ (начальная скорость равна нулю.) Здесь и далее точкой обозначается производная по времени. Из закона сохранения энергии следует:

$$m\dot{x}^2 + (k(2x)^2)/2 - mgx \sin \alpha = \text{const}; \quad (1)$$

Первое слагаемое (1) — кинетическая энергия катящегося со скоростью $\dot{x}$ колеса (см. замечание в конце решения), второе — потенциальная энергия пружины жесткости k (если колесо сместилось на x , то пружина растянута на $2x$), третье слагаемое — потенциальная энергия силы тяжести (начальное положение — нулевое значение потенциальной энергии). Дифференцируя (1), получаем:

$$2m\dot{x}\ddot{x} + 4k\dot{x}x - mg\dot{x} \sin \alpha = 0,$$

откуда следует уравнение, определяющее закон движения центра колеса:

$$\ddot{x} + 2k/mx - (g \sin \alpha)/2 = 0.$$

Запишем последнее уравнение в виде:

$$\ddot{x} + 2k/m(x - (mg \sin \alpha)/4k) = 0.$$

Обозначая $x_* = (mg \sin \alpha)/4k$, $\tilde{x} = x - x_*$, получаем уравнение гармонического осциллятора

$$\ddot{\tilde{x}} + \omega^2 \tilde{x} = 0,$$

где $\omega = \sqrt{2k/m}$.

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\tilde{x} = a \cos \omega t + b \sin \omega t,$$

где a и b — произвольные константы.

Получаем:

$$x = x_* + a \cos \omega t + b \sin \omega t,$$

$$\dot{x} = -a\omega \sin \omega t + b\omega \cos \omega t.$$

С помощью начальных условий $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ находим $b = 0$, $a = -x_*$,

откуда следует

$$x = x_*(1 - \cos \omega t). \quad (2)$$

Таким образом, центр колеса совершает относительно $x = x_*$ гармонические колебания с периодом $T = 2\pi\omega = 2\pi\sqrt{m/2k}$ и амплитудой, равной x_* . Легко показать, что $x = x_*$ является положением равновесия, суммарный момент сил равен нулю.

Далее найдем выражение для скорости точки A . Введем подвижную декартову систему координат $Ox'y'$, центр O которой совпадает с центром колеса, а ось x' параллельна оси x неподвижной системы. При смещении центра колеса на расстояние x колесо поворачивается относительно своей оси на угол $\gamma(t) = x(t)/R$, поэтому координаты точки A определяются формулами: $x' = R \sin \gamma$, $y' = R \cos \gamma$.

Тогда скорость точки A в подвижной системе равна

$$\vec{v}' = ((x'), (y')) = (R\dot{\gamma} \cos \gamma; -R\dot{\gamma} \sin \gamma) = (\dot{x} \cos \gamma; -\dot{x} \sin \gamma),$$

а ее абсолютная скорость согласно закону сложения скоростей

$$\vec{v}_A = \vec{v}_0 + \vec{v}' = (\dot{x}, 0) + (\dot{x} \cos \gamma; -\dot{x} \sin \gamma) = \dot{x}(1 + \cos \gamma; -\sin \gamma).$$

Величина квадрата этой скорости

$$v_A^2 = \dot{x}^2((1 + \cos \gamma)^2 + (-\sin \gamma)^2) = 4\dot{x}^2 \cos^2 \gamma/2.$$

Из (2) следует $\dot{x} = x_*\omega \sin \omega t$, поэтому

$$v_A^2 + 4x_*^2\omega^2 \sin^2 \omega t \cos^2 \gamma/2.$$

С помощью (2) находим

$$\sin^2 \omega t = 1 - \cos^2 \omega t = 1 - (1 - x/x_*)^2 = 1 - (1 - R\gamma/x_*)^2.$$

Таким образом, получена зависимость квадрата скорости точки A от угла γ :

$$v_A^2 = 4x_*^2\omega^2 f(\gamma), \text{ где } f(\gamma) = [1 - (1 - R\gamma/x_*)^2] \cos^2 \gamma/2.$$

По условию задачи величина скорости v_A (значит, и ее квадрата v_A^2) достигает максимального значения в те моменты времени, когда точка A находится на расстоянии H от плоскости. Этому положению соответствует значение угла $\gamma = \gamma_1 = \arccos(H - R)/R$. По условию точка A никогда не касается плоскости, поэтому $0 < \gamma_1 < \pi$, что учтено в формуле для γ_1 .

Итак, v_A^2 достигает максимального значения при $\gamma = \gamma_1$, поэтому $df/d\gamma(\gamma_1) = 0$.

Обозначим $R/x_* = c$, тогда $f(\gamma) = [1 - (1 - c\gamma)^2] \cos^2 \gamma/2$,

$$df/d\gamma = \cos^2 \gamma/2[2c(1 - \gamma) - c\gamma(2 - c\gamma) \operatorname{tg} \gamma/2],$$

Приравнявая последнее выражение к нулю при $\gamma = \gamma_1$,

получаем

$$c = R/x_* = 4Rk/(mg \sin \alpha) = 2(\gamma_1 \operatorname{tg} \gamma_1/2 - 1)/(\gamma_1 \operatorname{tg} \gamma_1/2 - 2).$$

Отсюда следует

$$k = ((\gamma_1 \operatorname{tg} \gamma_1/2 - 1)mg \sin \alpha)/(2\gamma_1(\gamma_1 \operatorname{tg} \gamma_1/2 - 2)R).$$

Ответ:

$$k = ((\gamma_1 \operatorname{tg} \gamma_1/2 - 1) \sin \alpha)/(2\gamma_1(\gamma_1 \operatorname{tg} \gamma_1/2 - 2))mg/R,$$

где $\gamma_1 = \arccos(H - R)/R$.

Замечание.

В решении было использовано, что кинетическая энергия катящегося без проскальзывания тонкого обруча равна $E = mV^2$, где m — его масса, V — скорость центра. Это можно показать «школьными» методами.

Разобьем обруч на большое число N маленьких «кусочков» с массой m_i , $i = 1 \dots$. Согласно закону сложения скоростей скорость каждого кусочка равна $\vec{v}_i = \vec{v}_O + \vec{v}'_i$, где $\vec{v}_O$ — скорость центра обруча, $\vec{v}'_i$ — скорость m_i относительно поступательно движущейся системы координат, центр которой совпадает с центром обруча O .

Кинетическая энергия обруча равна (здесь и далее $\sum_{i=1}^N D_i = D_1 + D_2 + \dots + D_N$, а точкой будем обозначать скалярное произведение векторов):

$$E = 1/2 \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 = 1/2 \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = 1/2 \sum_{i=1}^N m_i (\vec{v}_0 + \vec{v}'_i) \cdot (\vec{v}_0 + \vec{v}'_i) = 1/2 \sum_{i=1}^N m_i (v_0^2 + v_i'^2)$$

Еще одно слагаемое равно нулю в силу закона сохранения импульса.

Таким образом, для кинетической энергии получим:

$$E = 1/2 \sum_{i=1}^N m_i v_0^2 + 1/2 \sum_{i=1}^N m_i v_i'^2$$

Вычислим каждое слагаемое в последней формуле.

$$1/2 \sum_{i=1}^N m_i v_0^2 = 1/2 v_0^2 \sum_{i=1}^N m_i = V^2/2 \sum_{i=1}^N m_i.$$

Движение обруча относительно подвижной системы отсчета — вращение с постоянной угловой скоростью $\omega = V/R$ (без проскальзывания), то есть линейная скорость всех точек обруча по величине равна V , т.е.

$$1/2 \sum_{i=1}^N m_i v_i'^2 = V^2/2 \sum_{i=1}^N m_i = V^2/2 m.$$

Итак, $E = V^2/2m + V^2/2m = mV^2$, что и требовалось доказать.