Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки» по математике 2022/23 уч.г.

Финальный тур. *Время выполнения заданий 180 минут*

10 класс

10.1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $(x^2+3xy+2y^2)(x^2y^2-1)=0$.

Решение. Разложив первую скобку на множители $(x + 2y)(x + y)$, а вторую – на множители $(xy +1)(xy – 1)$, получаем, что искомое множество представляет собой объединение двух прямых $y = –x$, $y = –x/2$ и двух гипербол $y = 1/x$, $y = –1/x$.

10.2. Сколько решений в натуральных числах x, y имеет уравнение $x + y + 2xy = 2023$?

Ответ: 6.

Решение. Домножим уравнение на 2, прибавим к обеим частям единицу и разложим левую часть на множители, а правую – в произведение простых делителей**:**

$$2x + 4xy + 2y + 1 = 4047 \Leftrightarrow (2x + 1)(2y + 1) = 4047 \Leftrightarrow (2x + 1)(2y + 1) = 3\cdot 19\cdot 71$$

Поскольку x и y – натуральные числа, каждый множитель в левой части не меньше трех, поэтому единицы в вариантах разложения на множители не может встретиться, и возможные варианты таковы:

1. $2x + 1 = 3$, $2y + 1 = 1349$. Отсюда $x = 1$, $y = 674$.

2. $2x + 1 = 19$, $2y + 1 = 213$. Отсюда $x = 9$, $y = 106$.

3. $2x + 1 = 71$, $2y + 1 = 57$. Отсюда $x = 35$, $y = 28$.

Кроме того, очевидно, имеются симметричные решения:

4. $x = 28$, $y = 35$; **5.** $x = 106$, $y = 9$; **6.** $x = 674$, $y = 1$.

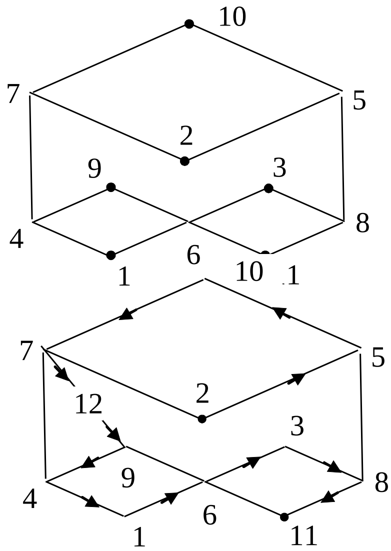
10.3. Дан треугольник, у которого длины сторон – числа рациональные. Докажите, что рациональным числом является отношение R/r , где R и r – радиусы описанной и вписанной окружности треугольника.

Решение. Пусть a, b, c – длины сторон, p – полупериметр, S – площадь треугольника. Из известных соотношений $S=pr$, $S=\dfrac{abc}{4R}$ и формулы Герона $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ следует, что $\dfrac{R}{r}=\dfrac{abcp}{4S^2}=\dfrac{abcp}{4p(p-a)(p-b)p-c)}=\dfrac{abc}{4(p-a)(p-b)(p-c)}$. Отсюда в силу рациональности сторон получаем утверждение задачи.

10.4. В финансовой компании 20 акционеров, их суммарный пакет – 2000 акций. Акционеров требуется разбить на две группы по 10 человек в каждой с пакетами по 1000 акций в группе. Докажите, что найдутся такие два акционера, что если один из них продаст другому часть своих акций, то нужное разбиение удастся провести.

Решение. Присвоим акционерам номера в порядке возрастания количества их акций: пусть $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_{20}$, где x_i – количество акций акционера с номером i. Далее, разобьём акционеров на две группы по 10 человек с нечетными и с четными номерами. Обозначим через S_1 и S_2 пакеты акций в первой и второй группах, соответственно. Очевидно, $S_1 \le S_2$. Пусть $\Delta = S_2 – S_1$. Имеем: $\Delta = (x_{20} – x_1) – (x_{19} – x_{18}) – (x_{17} – x_{16}) –...– (x_3 – x_2)$. Каждая из данных скобок неотрицательна, и значит, $\Delta \le x_{20} – x_1$. Заметим, что число Δ чётное, так как имеет одинаковую чётность с $S_1 + S_2 = 2000$. Если 20-й акционер (с x_{20} акций) продаст $\Delta/2$ своих акций первому акционеру (с x_1 акций), то у него станет $(x_{20} – \Delta/2)$ акций, а у первого $(x_1 + \Delta/2)$ акций. Новые пакеты акций в тех же группах будут $S_2 - \Delta/2$ и $S_1 + \Delta/2$. И теперь их разность будет равна $(S_2 - \Delta/2) - (S_1 + \Delta/2) = \Delta - \Delta = 0$, т.е. теперь в обеих группах станет по 1000 акций. (Замечание: если $\Delta = 0$, то уже изначально в обеих группах были равные пакеты акций, но для формального соблюдения условий задачи любой акционер может продать одну свою акцию акционеру из его же группы)..

10.5. **а)** Докажите, что первые 11 натуральных чисел 1, 2, …, 11 нельзя переставить так, чтобы соседние числа отличались либо на 3, либо на 5. **б)** Можно ли сделать это для чисел 1,2,…,12?



Ответ: б) можно**.**

Решение. а) Начертим граф возможных соседей (см. рисунок). Рассмотрим три пары вершин в четырехугольниках на графе (они отмечены жирными точками), а именно: (2, 10), (1, 9) и (3, 11) – это вершины с наименьшей степенью (количеством соседей), равной 2. Предположим, от противного, что есть простой путь на графе (т.е. без повторения вершин), проходящий через все вершины. Тогда найдется такая пара вершин среди трех указанных пар, что путь не начинается и не кончается в вершинах из этой пары (такая пара есть, т.к. концов у пути – два, а пар – три). Таким образом, обе вершины этой пары – "проходные", но если впервые будет пройдена одна вершина из этой пары, то вторая вершина станет изолированной («отрезанной»: в неё нельзя будет попасть потом). Противоречие.

б) Пример перестановки: 2, 5, 10, 7, 12, 9, 4, 1, 6, 3, 8, 11. Граф (см. рисунок) помогает построить подобный пример.