Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки» по математике 2022/23 уч.г.

Финальный тур. *Время выполнения заданий 180 минут*

11 класс

11.1. Решите неравенство $2\cos(\cos x) > 1$.

Ответ: x – любое действительное число.

Решение. Так как $\cos x \in [-1, 1]$ при всех x, то из неравенства $1 < \pi/3$ и свойств функции косинус (монотонного убывания в первой четверти и четности) следует, что для всех x выполняются неравенства: $\cos(\cos x) > \cos 1 > \cos \pi/3 = 1/2$. Отсюда следует результат.

11.2. Решите уравнение $(\sqrt{2023}+\sqrt{2022})^x - (\sqrt{2023}-\sqrt{2022})^x = \sqrt{8088}$.

Ответ: $x = 1$.

Решение. Заметим, что $\sqrt{8088} = 2\sqrt{2022}$. Это наблюдение подсказывает, что $x = 1$ является корнем уравнения. Покажем, что других корней нет. Действительно, левая часть представляет собой разность двух показательных функций: у первой из них основание больше единицы, а у второй – меньше единицы (можно заметить, что произведение данных оснований равно единице). Значит, левая часть – это разность возрастающей и убывающей функций на всей числовой прямой, т.е. представляет собой строго возрастающую функцию, и поэтому она принимает значение, равное числу в правой части, в единственной точке $x = 1$.

11.3. Дан треугольник, у которого длины сторон – числа рациональные. Докажите, что рациональным числом является **а)** отношение R/r, где R и r – радиусы описанной и вписанной окружности; **б)** значение $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\chi}{2}$, где α, β, χ – углы треугольника.

Решение. а) Пусть a, b, c – длины сторон, p – полупериметр, S – площадь треугольника. Из известных соотношений $S = pr$, $S = \frac{abc}{4R}$ и формулы Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ следует, что $\frac{R}{r} = \frac{abcp}{4S^2} = \frac{abcp}{4p(p-a)(p-b)p-c)} = \frac{abc}{4(p-a)(p-b)(p-c)}$. Отсюда в силу рациональности сторон получаем утверждение задачи.. **б)** Преобразуем выражение, пользуясь тригонометрическими формулами и равенством $\alpha+\beta+\chi=\pi$:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\chi}{2} = \frac{1}{2}(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2})\sin\frac{\chi}{2} = \frac{1}{2}(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2})\cos\frac{\alpha+\beta}{2} =$$

$$= \frac{1}{4}(\cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha+\beta) - 1) = \frac{1}{4}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\chi - 1).$$

Заметим, что из теоремы косинусов следует, что в случае рациональных сторон косинусы углов тоже рациональны. Отсюда получаем результат пункта б).

11.4. Дано несколько прямоугольных параллелепипедов в пространстве. Известно, что у каждой пары параллелепипедов есть хотя бы одна общая точка, а их рёбра соответственно параллельны. Обязательно ли все параллелепипеды имеют общую точку?

Ответ. Обязательно.

Решение. Поскольку у параллелепипедов ребра соответственно параллельны, мы можем ввести декартову систему координат, направив оси вдоль трех ребер, смежных с одной вершиной (которая станет началом координат) выбранного параллелепипеда**.** В этой системе координат ребра всех параллелепипедов будут параллельны осям. Спроектировав на ось O*x* данный *i*-ый параллелепипед (*i* = 1, 2, …, *n*), получим отрезок, который обозначим $[a_i, b_i]$. Любая пара таких отрезков имеет непустое пересечение (в противном случае соответствующая пара параллелепипедов не пересекается). Таким образом, приходим к такой задаче: на числовой прямой есть попарно пересекающиеся отрезки $[a_i, b_i]$, (*i* = 1, 2, …, *n*), и требуется доказать, что у них имеется общая точка. Пусть *A* –наибольшее значение среди левых концов отрезков, т.е. $A = \max\{\, a_i \mid i = 1,2,\ldots,n \,\}$, и аналогично, пусть *B* – наименьшее значение среди правых концов отрезков. Тогда $A \le B$, так как в противном случае $a_i > b_j$ для некоторых *i* и *j* , а значит, *i*-ый и *j*-ый отрезки не пересекаются. Отсюда следует, что любая точка отрезка [*A*, *B*] будет общей для всех наших отрезков. Итак, пусть точка *x** принадлежит проекциям на ось O*x* всех параллелепипедов. Точно так же мы можем найти общие точки *y** и *z** проекций на оси O*y* и O*z*. Тогда точка с координатами (*x**, *y**, *z**) будет принадлежать всем параллелепипедам. *Комментарий. Если вместо параллелепипедов с соответственно параллельными ребрами рассматривать произвольные выпуклые фигуры в пространстве, то по теореме Хелли у всех фигур будет гарантированно общая точка, если у любых четырех из них непустое пересечение.*

11.5. **а)** Докажите, что первые 11 натуральных чисел 1, 2, …, 11 нельзя переставить так, чтобы соседние числа отличались либо на 3, либо на 5. **б)** Можно ли сделать это для чисел 1, 2, …, 12?

Ответ: б) можно**.**

Решение. а) Начертим граф возможных соседей (см. рисунок). Рассмотрим три пары вершин в четырехугольниках на графе (они отмечены жирными точками), а именно: (2, 10), (1, 9) и (3, 11) – это вершины с наименьшей степенью (количеством соседей), равной 2. Предположим, от противного, что есть простой путь на графе (т.е. без повторения вершин), проходящий через все вершины. Тогда найдется такая пара вершин среди трех указанных пар, что путь не начинается и не кончается в вершинах из этой пары (такая пара есть, т.к. концов у пути – два, а пар – три). Таким образом, обе вершины этой пары – "проходные", но если впервые будет пройдена одна вершина из этой пары, то вторая вершина станет изолированной («отрезанной»: в неё нельзя будет попасть потом). Противоречие.