**Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки» по математике 2022/23 уч.г.**
**Финальный тур.** ***Время выполнения заданий 180 минут***

## 7 класс

**7.1.** Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 5, с суммой цифр 100. Ответ обоснуйте.

**Ответ:** 599999999995 (между двумя пятерками 10 девяток). **Решение**. В силу делимости на 5, последней цифрой искомого числа $N$ может быть либо 5, либо 0. Если последняя цифра 0, то, не изменяя суммы цифр, мы можем заменить 0 на 5 и вычесть из пяти ненулевых цифр в других разрядах по единичке. Тогда получится меньшее число, удовлетворяющее условиям задачи. Далее, если какая-то цифра числа $N$ между первой и последней – не девятка, то увеличив её на единицу и уменьшив на единицу цифру в старшем разряде, опять получим меньшее число. Итак, у $N$ все цифры, кроме первой и последней – девятки (скажем, $n$ штук), а последняя – пятёрка. Первую цифру $x$ найдем из условия для суммы цифр: $x + 9n + 5 = 100$, т.е. $9n = 95 - x$. Очевидно, цифра $x$ для делимости правой части на 9 определяется однозначно: $x = 5$. Отсюда следует ответ.

**7.2.** В треугольнике $ABC$ точка пересечения медиан равноудалена от всех трех вершин. Докажите, что треугольник $ABC$ равносторонний.

**Решение**. Пусть $BM$ – медиана и $K$ – точка пересечения медиан. Тогда в равнобедренном треугольнике $AKC$ медиана $KM$ является и высотой. Отсюда получаем, что в треугольнике $ABC$ медиана $BM$ является высотой. Значит, прямоугольные треугольники $ABM$ и $CBM$ равны (по 1-му признаку равенства треугольников) и поэтому $AB = CB$. Аналогично, рассматривая медиану из вершины $A$, получим $AB = AC$. Итак, $CB = AB = AC$.

**7.3.** Существует ли набор из 25 различных целых чисел, обладающих следующим свойством: сумма всех 25 чисел равна нулю, а для любых 24 из них модуль суммы больше 25?

**Ответ:** существует**.** **Решение.** Если рассмотреть набор из 25 чисел с нулевой суммой, то для произвольных 24 чисел этого набора сумма будет равна $(-x)$, где $x$ – оставшееся («отброшенное») число. Значит, нужно найти набор из 25 различных целых чисел с нулевой суммой, в котором все числа по модулю больше 25. Для этого можно взять три различных числа, в сумме дающие 0, а остальные 22 числа взять в виде 11 пар противоположных чисел. Можно привести такой пример: $(-26), (-27), (+53), (-28), (+28), (-29), (+29), \ldots, (-38), (+38)$.

**7.4**. В отряде космонавтов 20 человек, у каждого не менее 14 друзей в отряде. В космос требуется отправить экипаж, в котором все дружат между собой. Обязательно ли удастся сформировать экипаж из четырех человек?

**Ответ:** обязательно. **Решение.** Для произвольного космонавта К рассмотрим группу G из 14 его друзей, так что в дополнительной группе G* будет 6 человек вместе с К. Внутри G у каждого космонавта, скажем, С не менее 8 друзей (8=14–6: из всех друзей С, которых не меньше 14, удалены космонавты дополнительной группы G*). Пусть А и В – два друга в группе G. Если, от противного, предположить, что у них нет общего друга в G, то у А внутри группы G есть 7 друзей (кроме В) и у В в G есть 7 друзей (кроме А), и они не пересекаются. Но тогда в G должно быть не менее 2 + 7 + 7 = 16 человек. Противоречие показывает, что в G есть тройка друзей (А, В и их общий друг), а вместе с К они составят искомый экипаж из 4 человек.

**7.5.** В каждую клетку клетчатого квадрата $9 \times 9$ записаны нули. За один ход разрешается выбрать строку и прибавить произвольное положительное число к любым двум соседним клеткам в выбранной строке (прибавляемое число разрешается менять от хода к ходу). Можно ли за несколько ходов составить квадрат, в котором суммы во всех девяти столбцах совпадают?

**Ответ:** нельзя**. Решение.** Обозначим через $A$ сумму 45 чисел в пяти столбцах с нечетными номерами, а через $B$ – сумму 36 чисел в остальных четырех столбцах (с четными номерами). Заметим, что к $A$ и к $B$ при каждом ходе прибавляется одно и то же число (вообще говоря, зависящее от хода). Поэтому разность $A–B$ остается постоянной. Если, от противного, предположить, что удастся составить искомый квадрат с некоторой суммой $S > 0$ в каждом столбце, то получим: $A = 5S$, $B = 4S$. Тогда $A - B = S > 0$, в то время как вначале имели $A = 0$, $B = 0$ и $S = 0$.