Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки» по математике 2022/23 уч.г.
Финальный тур. *Время выполнения заданий 180 минут*

8 класс

8.1. Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 5, с суммой цифр 100. Ответ обоснуйте.

Ответ: 599999999995 (между двумя пятерками 10 девяток).

Решение. В силу делимости на 5, последней цифрой искомого числа N может быть либо 5, либо 0. Если последняя цифра 0, то, не изменяя суммы цифр, мы можем заменить 0 на 5 и вычесть из пяти ненулевых цифр в других разрядах по единичке. Тогда получится меньшее число, удовлетворяющее условиям задачи. Далее, если какая-то цифра числа N между первой и последней – не девятка, то увеличив её на единицу и уменьшив на единицу цифру в старшем разряде, опять получим меньшее число. Итак, у N все цифры, кроме первой и последней – девятки (скажем, n штук), а последняя – пятёрка. Первую цифру x найдем из условия для суммы цифр: $x + 9n + 5 = 100$, т.е. $9n = 95 – x$. Очевидно, цифра x для делимости правой части на 9 определяется однозначно: $x = 5$. Отсюда следует ответ.

8.2. Даны два взаимно простых натуральных числа p и q, отличающиеся больше, чем на единицу. Докажите, что существует такое натуральное n, что числа $p + n$ и $q + n$ не будут взаимно простыми.

Решение. Пусть, для определенности, $q > p$. Обозначим $m = q – p > 1$. Заметим, что $p + n$ и $q + n$ при любом фиксированном n дают одинаковые остатки от деления на m, поскольку их разность постоянна и равна $q – p = m$. При изменении n от 1 до m эти остатки пробегают все возможные m значений (начиная с $p \pmod m$). Значит, при некотором $n < m$ получится нулевой остаток, т.е. оба числа $p + n$ и $q + n$ будут делиться на m, и тем самым, не будут взаимно простыми. *Комментарий. Найденное n, для которого оба числа p+n и q+n делятся на m, не будет наименьшим в условиях задачи, когда m –число составное. Действительно, если m' –наименьший простой делитель числа m, то вместо рассмотрения остатков от деления на m можно ограничиться остатками от деления на m', поэтому искомое число n будет меньше, чем m'.*

8.3. О данном треугольнике и данном четырехугольнике известно следующее: для любых двух углов треугольника найдется угол четырехугольника, по величине равный сумме этих двух углов треугольника. Докажите, что треугольник равнобедренный.

Решение. Пусть α, β, γ – углы треугольника. Если предположить, от противного, что все эти углы различны, то числа $(\alpha + \beta)$, $(\beta + \gamma)$ и $(\alpha + \gamma)$ будут различными, и в четырехугольнике будет три разных вершины с такими углами. Сумма этих трех углов равна $2\cdot(\alpha + \beta + \gamma) = 2\cdot180° = 360°$, но это противоречит тому, что в четырехугольнике сумма всех четырех углов равна 360°.

8.4. В отряде космонавтов 20 человек, у каждого – не менее 15 друзей в отряде. В космос требуется отправить экипаж, в котором все дружат между собой. Обязательно ли удастся сформировать экипаж **а)** из четырех человек? **б)** из пяти человек?

Ответ: а) обязательно: **б)** не обязательно**.**

Решение. а) См. решение задачи 7.4 (условие 7.4 даже более общее, чем в пункте **а)** задачи 8.4**). б)** Рассмотрим такой контрпример. Пусть космонавты разбиты на 4 группы по 5 человек в каждой, и пусть каждый космонавт не дружит ни с кем из своей группы, а дружит со всеми остальными 15 космонавтами из других групп. Таким образом, у каждого ровно 15 друзей. Если предположить, от противного, что найдутся 5 космонавтов, дружащих между собой, то из них по меньшей мере двое должны быть из одной группы (т.к. групп 4, а космонавтов 5). Получаем противоречие (в нашем примере в одной и той же группе друзей нет).

8.5. В каждую клетку клетчатого квадрата 9×9 записаны нули. Требуется за несколько ходов составить магический квадрат (сумма во всех строках и столбцах должна быть равна одному и тому же числу). Можно ли это сделать, если за один ход разрешается **а)** выбрать строку и прибавить положительное число к любым двум соседним клеткам в выбранной строке, причем прибавляемое число разрешается менять от хода к ходу; **б)** прибавить единицу к любым двум соседним по стороне клеткам?

Ответ: а) нельзя**: б)** можно**.**

Решение. а) Обозначим через A сумму 45 чисел в пяти столбцах с нечетными номерами, а через B – сумму 36 чисел в остальных четырех столбцах (с четными номерами). Заметим, что к A и к B при каждом ходе прибавляется одно и то же число (вообще говоря, зависящее от хода). Поэтому разность $A–B$ остается постоянной. Если, от противного, предположить, что удастся составить искомый квадрат с некоторой суммой $S > 0$ в каждом столбце, то получим: $A = 5S$, $B = 4S$. Тогда $A - B = S > 0$, в то время как вначале имели $A = 0$, $B = 0$ и $S = 0$. (из которого следует, что не только магический квадрат, но и равных сумм в столбцах нельзя получить). **б)** Имеются различные алгоритмы составления магического квадрата. Они сводятся к разбиению на доминошки (прямоугольники 2×1). Приведем алгоритм разбиения на доминошки (прямоугольники 2×1) с дальнейшим прибавлением единичек к доминошкам. Рассмотрим квадрат 8×8, который получается, если из исходного квадрата вырезать левую верхнюю угловую клетку, а также (примыкающие) 16 клеток: 8 клеток верхней строки и 8 клеток левого столбца. Назовем эти 16 клеток фигурой Г. Очевидно, и квадрат 8×8, и фигура Г разбиваются на доминошки. Если после такого разбиения на доминошки повторить n раз прибавление единичек в каждую доминошку квадрата 8×8, и m раз – в каждую доминошку фигуры Г, то сумма чисел в любой строке, начиная со второй, квадрата 9×9 будет равна $m+8n$, и аналогично – для любого столбца, начиная со второго. А в первой строке (столбце) сумма будет $8m$. Для равенства $m+8n= 8m$ можно взять $n=7$, $m=8$. Тогда получится магический квадрат с суммами 64 в строках и столбцах. *Комментарий. Имеется алгоритм разбиения на доминошки, который можно разделить на 9 этапов, соответствующих разбиению доски, из которой удалена очередная диагональная клетка. Кроме того, есть алгоритм, использующий тот факт, что квадрат* 9×9 *можно разбить на квадраты* 3×3, *и задача сводится к более простой – составлению магического квадрата* 3×3.