Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки» по математике 2022/23 уч.г.

Финальный тур. *Время выполнения заданий 180 минут*

9 класс

9.1. При каких значениях параметра a уравнения $ax + a = 7$ и $3x - a = 17$ имеют общий целый корень?

Ответ: $a = 1$.

Решение. Решая эти два уравнения как систему с неизвестными x и a, выразим a из второго уравнения и подставим в первое. Получим квадратное уравнение $3x^2 - 14x - 24 = 0$. У него два корня: 6 и (–4/3). Для целого корня $x = 6$ соответствующее значение $a = 3x - 17 = 1$.

9.2. Даны два взаимно простых натуральных числа p и q, отличающиеся больше, чем на единицу. **а)** Докажите, что существует натуральное n, для которого числа $p + n$ и $q + n$ не будут взаимно простыми. **б)** Найдите наименьшее такое n при $p = 2$, $q = 2023$.

Ответ: б) 41**.**

Решение. См. решение задачи 8.2 (вместе с обозначениями и комментарием**).** Если оба числа $p + n$ и $q + n$ делятся на некоторое $k > 1$, то $m = q - p$ тоже делится на k и поэтому k не меньше наименьшего простого делителя числа m**.** Для $p = 2$, $q = 2023$ имеем $m = 2021 = 43 \cdot 47$ – разложение на простые множители. Значит, к числам 2 и 2023 для делимости на 43 надо прибавить 43 – 2 = 41.

9.3. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, отличный от дельтоида (дельтоид – это четырехугольник, симметричный относительно одной из своих диагоналей). Известно, что биссектрисы углов A и C пересекаются в точке на диагонали BD. Докажите, что биссектрисы углов B и D пересекаются на диагонали AC.

Решение. Пусть M – точка пересечения биссектрис углов A и C (поскольку $ABCD$ – не дельтоид, эти биссектрисы не совпадают и имеют единственную точку пересечения). По условию, M лежит на диагонали BD и поэтому по свойству биссектрис, $\frac{DA}{AB} = \frac{DM}{MB} = \frac{DC}{CB}$. Отсюда $\frac{DA}{DC} = \frac{AB}{CB}$. Но тогда биссектрисы углов B и D пересекают диагональ AC в одной и той же точке. Действительно, если бы точки пересечения N и L этих биссектрис с диагональю AC были бы различны, то из равенств $\frac{NA}{NC} = \frac{AB}{CB}$ и $\frac{DA}{DC} = \frac{LA}{LB}$ следовало бы, что отношения $\frac{AB}{CB}$ и $\frac{DA}{DC}$ не могут быть одинаковыми. Значит, точки N и L совпадают.

9.4. Дано уравнение $x^3 + 2^n \cdot y = y^3 + 2^n \cdot x$. Докажите, что **а)** если натуральные числа x, y, n удовлетворяют этому уравнению, то $x = y$; **б)** если ненулевые целые x, y и неотрицательные целые n удовлетворяют этому уравнению, то $|x| = |y|$.

Решение. а) Имеем $x^3 - y^3 = 2^n(x - y)$. Если $x \neq y$, то отсюда после деления на $(x - y)$ получим $x^2 + xy + y^2 = 2^n$. Если хотя бы одно из чисел x или y нечетное, то в левой части будет стоять нечетное число, а в правой четное. Значит, $x = 2x_1$, $y = 2y_1$ для некоторых натуральных x_1,

y_1. Поэтому левая часть делится на 4, и тогда $n > 1$. Таким образом, приходим к уравнению $x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2 = 2^{n-2}$. Продолжая эти рассуждения, получим аналогично $x_2^2 + x_2y_2 + y_2^2 = 2^{n-4}$ и так далее (методом спуска) придем либо к уравнению вида $x^2 + xy + y^2 = 2$, либо к уравнению вида $x^2 + xy + y^2 = 1$. Оба этих уравнения, очевидно, неразрешимы в натуральных числах, откуда следует утверждение пункта **а)**. **б**) Если x и y – целые числа одного знака, то утверждение следует из пункта **а**) (случай $n = 0$ также был рассмотрен при решении пункта **а**). Пусть теперь числа x и y разных знаков, для определенности $x > 0, y < 0$. Тогда, обозначив $y = -t$ и повторяя рассуждения пункта а), после деления на $(x + t) > 0$ приходим к уравнению $x^2 - xt + t^2 = 2^n$ в натуральных числах x, t. Аналогично, методом спуска приходим к одному из уравнений вида: $x^2 - xt + t^2 = 2$ или $x^2 - xt + t^2 = 1$ в натуральных числах. Первое из этих уравнений неразрешимо по тем же соображениям делимости на 2 и 4 (как и выше). Второе уравнение имеет лишь одно решение в натуральных числах, а именно $x = t = 1$. Действительно, выражение $x^2 - xt + t^2 \geq 2xt - xt = xt$ может (для натуральных x, t) равняться единице лишь при $x = t = 1$ и, возвращаясь к исходным переменным до спуска, получаем: $x = 2^{n/2}, y = -2^{n/2}$ (при этом n должно быть четным). В любом случае $|x| = |y|$.

9.5. В финансовой компании 20 акционеров, их суммарный пакет – 2000 акций. Акционеров требуется разбить на две группы по 10 человек в каждой с пакетами по 1000 акций в группе. Докажите, что найдутся такие два акционера, что если один из них продаст другому часть своих акций, то нужное разбиение удастся провести.

Решение. Присвоим акционерам номера в порядке возрастания количества их акций: пусть $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{20}$, где x_i – количество акций акционера с номером i. Далее, разобьём акционеров на две группы по 10 человек с нечетными и с четными номерами. Обозначим через S_1 и S_2 пакеты акций в первой и второй группах, соответственно. Очевидно, $S_1 \leq S_2$. Пусть $\Delta = S_2 - S_1$. Имеем: $\Delta = (x_{20} - x_1) - (x_{19} - x_{18}) - (x_{17} - x_{16}) - \ldots - (x_3 - x_2)$. Каждая из данных скобок неотрицательна, и значит, $\Delta \leq x_{20} - x_1$. Заметим, что число Δ чётное, так как имеет одинаковую чётность с $S_1 + S_2 = 2000$. Если 20-й акционер (с x_{20} акций) продаст $\Delta/2$ своих акций первому акционеру (с x_1 акций), то у него станет $(x_{20} - \Delta/2)$ акций, а у первого $(x_1 + \Delta/2)$ акций. Новые пакеты акций в тех же группах будут $S_2 - \Delta/2$ и $S_1 + \Delta/2$. И теперь их разность будет равна $(S_2 - \Delta/2) - (S_1 + \Delta/2) = \Delta - \Delta = 0$, т.е. теперь в обеих группах станет по 1000 акций. (Замечание: если $\Delta = 0$, то уже изначально в обеих группах были равные пакеты акций, но для формального соблюдения условий задачи любой акционер может продать одну свою акцию акционеру из его же группы).