

Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки» по математике
2022/23 уч.г.

Финальный тур. *Время выполнения заданий 180 минут*

11 класс

- 11.1. Решите неравенство $2\cos(\cos x) > 1$.
- 11.2. Решите уравнение $(\sqrt{2023} + \sqrt{2022})^x - (\sqrt{2023} - \sqrt{2022})^x = \sqrt{8088}$.
- 11.3. Дан треугольник, у которого длины сторон – числа рациональные. Докажите, что рациональным числом является **а)** отношение R/r , где R и r – радиусы описанной и вписанной окружности; **б)** значение $\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\chi}{2}$, где α, β, χ – углы треугольника.
- 11.4. Дано несколько прямоугольных параллелепипедов в пространстве. Известно, что у каждой пары параллелепипедов есть хотя бы одна общая точка, а их рёбра соответственно параллельны. Обязательно ли все параллелепипеды имеют общую точку?
- 11.5. **а)** Докажите, что первые 11 натуральных чисел $1, 2, \dots, 11$ нельзя переставить так, чтобы соседние числа отличались либо на 3, либо на 5. **б)** Можно ли сделать это для чисел $1, 2, \dots, 12$?