

Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки» по математике
2022/23 уч.г.

Финальный тур. *Время выполнения заданий 180 минут*

9 класс

- 9.1. При каких значениях параметра a уравнения $ax + a = 7$ и $3x - a = 17$ имеют общий целый корень?
- 9.2. Даны два взаимно простых натуральных числа p и q , отличающиеся больше, чем на единицу. а) Докажите, что существует натуральное n , для которого числа $p + n$ и $q + n$ не будут взаимно простыми. б) Найдите наименьшее такое n при $p = 2$, $q = 2023$.
- 9.3. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, отличный от дельтоида (дельтоид – это четырехугольник, симметричный относительно одной из своих диагоналей). Известно, что биссектрисы углов A и C пересекаются в точке на диагонали BD . Докажите, что биссектрисы углов B и D пересекаются на диагонали AC .
- 9.4. Дано уравнение $x^3 + 2^n \cdot y = y^3 + 2^n \cdot x$. Докажите, что а) если натуральные числа x, y, n удовлетворяют этому уравнению, то $x = y$; б) если ненулевые целые x, y и неотрицательные целые n удовлетворяют этому уравнению, то $|x| = |y|$.
- 9.5. В финансовой компании 20 акционеров, их суммарный пакет – 2000 акций. Акционеров требуется разбить на две группы по 10 человек в каждой с пакетами по 1000 акций в группе. Докажите, что найдутся такие два акционера, что если один из них продаст другому часть своих акций, то нужное разбиение удастся провести.