Межрегиональная олимпиада школьников «Будущие исследователи – будущее науки» по математике 2022/2023

Отборочный тур. ***Время выполнения заданий – 90 минут***

Вариант 1

10 класс

10.1. К восьмизначному числу 20222023 припишите слева и справа по цифре так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 72. (Укажите все возможные решения.)

Ответ. 3202220232.

Решение. Поскольку $72 = 8 \cdot 9$, то требуется приписать цифры так, чтобы полученное число делилось и на 8, и на 9. Делимость на 8 определяется тремя последними цифрами: значит, к двузначному числу 23 надо приписать справа цифру, чтобы получилось трёхзначное число, кратное 8. Есть только одна цифра, а именно двойка, для которой это возможно (232:8 = 29). После этого первую цифру искомого числа определяем по признаку делимости на 9 (сумма цифр должна делиться на 9, поэтому к имеющейся сумме цифр, равной 15, надо добавить 3).

10.2. Решите уравнение $\dfrac{(2x-1)^2}{x^3-2x^2+1}+\dfrac{4x-4x^2-1}{x^3-3x^2+2}=0$.

Ответ: $x_1=\dfrac{1}{2},\ x_2=-1$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $\dfrac{(2x-1)^2}{x^3-2x^2+1}=\dfrac{(2x-1)^2}{x^3-3x^2+2}$. Значит, либо $2x-1=0$, либо $\dfrac{1}{x^3-2x^2+1}=\dfrac{1}{x^3-3x^2+2}$. Из первого уравнения x=1/2, и при этом значении знаменатели второго уравнения не равны 0, т.е. x=1/2– корень. Из второго уравнения следует: $x^3-2x^2+1=x^3-3x^2+2 \Leftrightarrow x^2=1$, т.е. $x=\pm 1$. При $x=1$ знаменатель первой дроби обращается в нуль, значит, $x=1$ не является корнем. При $x=-1$ оба знаменателя отличны от нуля.

10.3. Дан четырехугольник *ABCD,* около которого описана окружность радиуса *R.* Можно ли утверждать, что если $AB^2+BC^2+CD^2+AD^2=8R^2$, то хотя бы одна из диагоналей четырехугольника является диаметром описанной окружности?

Ответ: нет, нельзя.

Решение. Для примера можно рассмотреть вписанный четырехугольник со взаимно перпендикулярными диагоналями, отличными от диаметров. К такому примеру можно придти, если ввести угловые величины дуг α, β, γ, δ, на которые разбивается окружность. Тогда $AB^2+BC^2+CD^2+AD^2=4R^2\left(\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\sin^2\dfrac{\beta}{2}+\sin^2\dfrac{\gamma}{2}+\sin^2\dfrac{\delta}{2}\right)$. В скобках число 2 получается не только при условии $\alpha+\beta=\gamma+\delta=180°$, но и в том случае, когда $\alpha+\gamma=\beta+\delta=180°$. Это соответствует случаю вписанного четырехугольника со взаимно перпендикулярными диагоналями, т.к. по свойству угла между хордами, прямой угол между диагоналями равен тогда $(\alpha+\gamma)/2=(\beta+\delta)/2$. *Комментарий. К подобному примеру можно придти без тригонометрии: рассмотрим сначала четырехугольник ABCD, у которого диагональ AC является диаметром, а затем вместо точки A возьмем симметричную ей относительно диаметра, перпендикулярного BD, точку A'. Тогда четырехугольник A'BCD искомый.*

10.4. В клетчатом квадрате 25×25 в некоторые клетки поставлен знак "плюс". Докажите, что найдутся два (возможно, пересекающиеся) квадрата 3×3 с одинаковым расположением плюсов (т.е. при параллельном переносе плюсы должны совпасть).

Решение. Подсчитаем сначала количество квадратов 3×3 в клетчатом квадрате 25×25. Каждый такой квадрат однозначно определяется положением своей левой нижней вершины. Этой вершиной может быть любая узловая точка той части таблицы, которая останется, если из квадрата 25×25 отрезать сверху и справа каемку в 3 клетки: останется левый нижний квадрат размера 22×22. В таком квадрате $23^2=529$ узловых точек. Итак, имеется 529 квадратов 3×3. Различные варианты расположения плюсов (с точки зрения условий задачи) в квадрате 3×3 – это различные упорядоченные наборы из 9 элементов, каждый из которых может быть двух видов: "плюс" или пустая клетка. Поэтому различных вариантов будет $2^9=512$. Поскольку число квадратов (=529) больше числа вариантов (=512), получаем утверждение задачи.

Вариант 2

10 класс

10.1. Решите неравенство $|x^2-x|\le 2x^2-3x+1$.

Ответ. $x\le 1/3$; $x\ge 1$.

Решение. Если $x^2-x>0$, т.е. при $x>1$ или $x<0$, неравенство примет вид $x^2-2x+1\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\ge 0$, и значит при $x>1$ или $x<0$ исходное неравенство верно. Если же $x^2-x\le 0$, т.е. при $0\le x\le 1$, нераверство запишется так: $3x^2-4x+1\ge 0 \Leftrightarrow (x–1/3)(x—1)\ge 0 \Leftrightarrow x\le 1/3$ или $x\ge 1$. Учитывая область $0\le x\le 1$, получаем ответ.

10.2. Обозначим через $s(n)$ сумму цифр натурального числа n (в десятичной записи). Существует ли такое n, что $n\cdot s(n)=20222022$?

Ответ. Не существует.

Решение. По признаку делимости на 3 и на 9 числа n и $s(n)$ либо оба делятся на 3 (на 9), либо оба не делятся на 3 (соответственно, на 9). Рассмотрим сначала первый случай, когда n и $s(n)$ делятся на 3. Тогда произведение $n\cdot s(n)$ делится на 9. Во втором случае n и $s(n)$ не делятся на 3, и тогда произведение $n\cdot s(n)$ не делится на 3. Однако число 20222022 делится на 3, но не делится на 9, т.к. сумма цифр этого числа равна 12. Значит, такого n не существует.

10.3. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат с центром O. Докажите, что отношение длины CO к сумме катетов $AC + CB$ есть величина постоянная для всех прямоугольных треугольников и найдите это отношение.

Ответ: $\sqrt{2}/2$.

Решение. Пусть $AB=c$, $\angle A=\alpha$. Тогда по теореме косинусов в треугольнике ACO имеем $CO^2=c^2\cos^2\alpha+c^2/2-\sqrt{2}c^2\cos\alpha\cos(\alpha+45°)=c^2/2+c^2\cos\alpha\sin\alpha=c^2(1+2\sin\alpha\cos\alpha)/2$. Отсюда $CO^2=\ c^2(\sin\alpha+\cos\alpha)^2/2$ и поскольку $AC+CB=c(\sin\alpha+\cos\alpha)$, получаем ответ.

10.4. В некоторые клетки квадратной таблицы 8×8 поставили знак "плюс". Докажите, что найдутся два (возможно, пересекающиеся) квадрата 4×4, в которых одинаковое количество плюсов.

Решение. Подсчитаем сначала количество квадратов 4×4 в таблице 8×8. Каждый такой квадрат однозначно определяется положением своей левой нижней вершины. Этой вершиной может быть любая узловая точка той части таблицы, которая останется, если из таблицы 8×8 отрезать сверху и справа каемку в 4 клетки: останется левый нижний квадрат размера 4×4. В таком квадрате 5^2 = 25 узловых точек. Итак, имеется 25 квадратов 4×4. Различных вариантов (по количеству плюсов) заполнения квадрата 4×4 имеется всего 17 (число плюсов – от 0 до 16). Поскольку 25>17, найдутся хотя бы два квадрата 4×4 с одинаковым количеством плюсов.