Межрегиональная олимпиада школьников «Будущие исследователи – будущее науки» по математике 2022/2023

Отборочный тур. ***Время выполнения заданий – 90 минут***

Вариант 1

11 класс

11.1. На доске написано 30-значное число 22…211…100…0, содержащее 10 двоек, 10 единиц и 10 нулей. Можно ли переставить цифры в этом числе так, чтобы получился квадрат натурального числа?

Ответ. Нельзя.

Решение. Обозначим данное число через N и предположим, от противного, что $N=n^2$ для некоторого натурального n. Сумма цифр числа N равна $2\cdot 10 + 1\cdot 10 = 30$. Из признаков делимости на 3 и на 9 следует, что N делится на 3, но не делится на 9. При перестановках цифр сумма цифр не меняется, и поэтому n обязано делиться на 3, но тогда n^2 делилось бы на 9. Противоречие.

11.2. Решите уравнение $\arccos\frac{x+1}{2} = 2\operatorname{arctg} x$.

Ответ: $x = \sqrt{2} - 1$.

Решение. Возьмем косинус от обеих частей и воспользуемся формулой $\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$. В результате получим $\frac{x+1}{2} = \frac{1-x^2}{1+x^2}$. Корни этого уравнения $x_1 = -1$; $x_{2,3} = \pm\sqrt{2} - 1$. Проверка для $x = -1$ и для $x = -\sqrt{2} - 1$ показывает, что $\arccos\frac{x+1}{2}$ и $\operatorname{arctg} x$ принимают значения в разных четвертях, т.е. эти корни посторонние. Корень же $x = \sqrt{2} - 1$ истинный, т.к. $\arccos(\sqrt{2}/2)$ и $2\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)$ лежат в промежутке $(0, \pi/2)$ (поскольку $\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1) < \operatorname{arctg} 1 < \pi/4$), где косинус изменяется монотонно.

11.3. На координатной плоскости начертили параболу – график приведенного квадратного трехчлена с целыми коэффициентами. Она касается оси Ox. Докажите, что на этой параболе можно отметить такую точку с целыми координатами (a,b), что график $y = x^2 + ax + b$ тоже касается оси Ox.

Решение. Пусть $x^2 + px + q$ – данный трёхчлен. Тогда $p^2 - 4q = 0$ по условию касания графика оси Ox (это условие равносильно тому, что дискриминант трёхчлена равен нулю). Заметим, что точка с координатами $(-p, q)$ лежит на графике трёхчлена, т.к. $(-p)^2 + p(-p) + q = q$. Эта точка имеет целые координаты, а дискриминант трёхчлена $y = x^2 + (-p)x + q$, т.е. $(-p)^2 - 4q$, равен нулю.

11.4. В клетчатом квадрате 25×25 в некоторые клетки поставлен знак "плюс". Докажите, что найдутся два (возможно, пересекающиеся) квадрата 3×3 с одинаковым расположением плюсов (т.е. при параллельном переносе плюсы должны совпасть).

Решение. Подсчитаем сначала количество квадратов 3×3 в клетчатом квадрате 25×25. Каждый такой квадрат однозначно определяется положением своей левой нижней вершины. Этой вершиной может быть любая узловая точка той части таблицы, которая останется, если из квадрата 25×25 отрезать сверху и справа каемку в 3 клетки: останется левый нижний квадрат размера 22×22. В таком квадрате $23^2 = 529$ узловых точек. Итак, имеется 529 квадратов 3×3. Различные варианты расположения плюсов (с точки зрения условий задачи) в квадрате 3×3 – это различные упорядоченные наборы из 9 элементов, каждый из которых может быть двух видов: "плюс" или пустая клетка. Поэтому различных вариантов будет $2^9 = 512$. Поскольку число квадратов (=529) больше числа вариантов (=512), получаем утверждение задачи..

Вариант 2

11 класс

11.1. Решите неравенство $|x^2 - x| \le 2x^2 - 3x + 1$.

Ответ: $x \le 1/3$; $x \ge 1$.

Решение. Если $x^2 - x > 0$, т.е. при $x > 1$ или $x < 0$, неравенство примет вид $x^2 - 2x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \ge 0$, и значит при $x > 1$ или $x < 0$ исходное неравенство верно. Если же $x^2 - x \le 0$, т.е. при $0 \le x \le 1$, нераввество запишется так: $3x^2 - 4x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (x-1/3)(x-1) \ge 0 \Leftrightarrow$ $x \le 1/3$ или $x \ge 1$. Учитывая область $0 \le x \le 1$, получаем ответ.

11.2. Решите уравнение $2\cos(\pi x) = x + \dfrac{1}{x}$.

Ответ. $x = -1$.

Решение. Левая часть уравнения по модулю не больше двух, а правая часть по модулю не меньше двух: для правой части это следует из элементарных неравенств, например (при $x > 0$), – из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим, и при $x < 0$ оно верно для модуля в силу нечетности функции $y = x+1/x$; к тому же выводу можно также придти, исследуя с помощью производной множество значений этой функции. Значение, равное 2 (по модулю) достигается только при $x = 1$ или $x = -1$. Проверив эти числа, получаем, что подходит только $x = -1$.

11.3. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат с центром O. Докажите, что отношение длины CO к сумме катетов $AC + CB$ есть величина постоянная для всех прямоугольных треугольников и найдите это отношение.

Ответ: $\sqrt{2}/2$.

Решение. Пусть $AB = c$, $\angle A = \alpha$. Тогда по теореме косинусов в треугольнике ACO имеем $CO^2 = c^2\cos^2\alpha + c^2/2 - \sqrt{2}c^2\cos\alpha\cos(\alpha + 45°) = c^2/2 + c^2\cos\alpha\sin\alpha = c^2(1 + 2\sin\alpha\cos\alpha)/2$.

Отсюда $CO^2 =$ $c^2(\sin\alpha + \cos\alpha)^2/2$ и поскольку $AC + CB = c(\sin\alpha + \cos\alpha)$, получаем ответ.

11.4. Докажите, что число $2^{2022} + 1$ **а)** делится на 65; **б)** может быть представлено в виде произведения четырех натуральных чисел, отличных от 1.

Решение. а) Обозначим данное число через N. Разложение 2022 на простые множители даёт 2022 = $2 \cdot 3 \cdot 337$. Поэтому $N = (4^{3\cdot})^{337} + 1$. Как известно, сумма нечетных степеней двух чисел раскладывается на множители: $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n})$. Поэтому $N = (4^{3\cdot})^{337} + 1$ делится на $(4^{3\cdot} + 1) = 65$. **б)** Представим N как сумму кубов: $N = (4^{337\cdot})^3 + 1 =$ $(4^{337} + 1)(4^{674} - 4^{337} + 1)$. В силу пункта **а)** произведение двух данных скобок делится на 65 = 5 13. Очевидно, каждая из скобок больше 65. Выделим в них множители 5 и 13 и разделим N на 65, тогда частное будет произведением двух натуральных чисел (больших 65), а вместе с множителями 5 и 13 число N будет представлено в виде произведения четырех натуральных чисел, отличных от 1. *Комментарий. Для пункта **а)** можно предложить другое решение: поскольку* $2^6 \equiv -1 \pmod{65}$, *то после возведения этого сравнения в степень 337, получим результат. В пункте **б)** для числа N можно предложить другой способ разложения:* $2^{2022} + 1 = (2^{2022} + 2 \cdot 2^{1011} + 1) - 2^{1012} = (2^{1011} + 1)^2 - (2^{506})^2 = (2^{1011} - 2^{506} + 1)(2^{1011} + 2^{506} + 1)$.