

**Межрегиональная олимпиада школьников «Будущие исследователи –  
будущее науки» по математике 2022/2023**  
Отборочный тур. *Время выполнения заданий – 90 минут*

**Вариант 1.**

**7 класс**

**7.1.** У старшего брата путь до школы занимает 12 минут, а у младшего (по той же дороге) – 20 минут. Сколько минут пройдет с момента выхода из дома младшего брата до момента, когда его догонит старший, если он вышел на 5 минут позже младшего?

**Ответ.** Через 12,5 минут. **Решение.** Пусть  $S$  – расстояние от дома до школы. Так как младший брат проходит это расстояние за 20 минут, то за 5 минут он пройдет путь  $\frac{5S}{20} = \frac{S}{4}$ . После момента выхода из дома старшего брата скорость сближения братьев будет равна  $\frac{S}{12} - \frac{S}{20} = \frac{S}{30}$ . Для того, чтобы найти время с этого момента до встречи, разделим расстояние между ними на скорость сближения. Получим  $\frac{S}{4} : \frac{S}{30} = 7,5$  (минут). С учетом задержки на 5 минут, получаем ответ 12,5 минут (и поскольку это меньше 20 минут, старший брат успевает догнать младшего).

**7.2.** Длину прямоугольника увеличили на 12%, а ширину – на 15%. **а)** На сколько процентов площадь нового прямоугольника больше площади исходного? **б)** Найдите отношение длины к ширине исходного прямоугольника, если известно, что периметр нового прямоугольника на 13% больше периметра исходного.

**Ответ.** **а)** на 28,8%. **б)** 2:1. **Решение.** **а)** Пусть  $a$  и  $b$  – длина и ширина прямоугольника, соответственно. Тогда стороны нового прямоугольника равны  $1,12a$  и  $1,15b$ , а его площадь  $S = 1,12a \cdot 1,15b = 1,288ab$ , что составляет 128,8% от площади исходного прямоугольника. Таким образом, площадь увеличилась на 28,8%. **б)** Из условия задачи следует равенство  $2(1,12a + 1,15b) = 2(1,13(a+b))$ , из которого получаем  $0,02b = 0,01a$ . Следовательно,  $a = 2b$ .

**7.3.** Даны натуральные числа  $a$  и  $b$ . Можно ли утверждать, что они оканчиваются на одну и ту же цифру в десятичной записи, если известно, что числа  $2a + b$  и  $2b + a$  оканчиваются на одну и ту же цифру?

**Ответ.** Да, можно. **Решение.** Вычислим разность чисел  $2a + b$  и  $2b + a$ , тогда получим, что  $a - b$  делится на 10, т.е.  $a$  и  $b$  оканчиваются на одну и ту же цифру.

**7.4.** В спортзале по кругу в произвольном порядке встали 10 мальчиков и 10 девочек. Сможет ли тренер начертить мелом на полу 10 непересекающихся отрезков так, чтобы каждый из них соединял мальчика и девочку (при любом расположении ребят)?

**Ответ.** Сможет. **Решение.** Будем рассматривать такую модель задачи: на окружности отмечены 10 точек с буквой м (мальчики) и 10 точек с буквой д (девочки). Требуется провести 10 непересекающихся хорд, на концах каждой из которых разные буквы (м – д). Первую хорду проведем между парой соседних (по окружности) разных букв: очевидно, такая пара (даже две пары) существует. Далее выкинем мысленно эту пару из рассмотрения и будем считать, что на окружности 9 букв м и 9 букв д, т.е. сотрем на время первую хорду и её концы. С оставшимися 18 буквами поступаем точно так же, соединяя хордой соседние разные буквы. Заметим, что новая хорда не пересекает первую, т.к. между концами первой хорды букв нет. Далее аналогично выкидываем из рассмотрения уже построенные хорды и их концы и строим новую хорду между соседними оставшимися разными буквами. Последняя, 10-я хорда соединит единственную пару разных букв, после чего восстановим стертые ранее хорды.

## Вариант 2

### 7 класс

7.1. Два автомобиля едут по шоссе со скоростью 80 км/ч и с интервалом 10 м. У знака ограничения скорости машины мгновенно снижают скорость до 60 км/ч. С каким интервалом они будут двигаться после знака ограничения?

**Ответ.** 7,5 м. **Решение.** Пусть  $v$  (м/час) – скорость машин до знака,  $u$  (м/час) – скорость машин после знака. Вторая машина проедет знак позже первой на  $10/v$  (час). За это время первая машина проедет  $10u/v$  (метров) =  $10 \cdot 6/8 = 7,5$  метров. Этот интервал и будет сохраняться после знака. *Комментарий.* Как следует из решения, результат зависит лишь от отношения  $u/v$ , поэтому переводить скорости в другие единицы измерения необязательно.

7.2. Даны два равнобедренных треугольника, у которых периметры одинаковы. Основание второго треугольника на 15% больше основания первого, а боковая сторона второго треугольника на 5% меньше боковой стороны первого. Найдите отношение сторон первого треугольника.

**Ответ.** Основание относится к боковой стороне как 2:3. **Решение.** Пусть  $a$  и  $b$  – длина основания и боковой стороны, соответственно, первого треугольника. Тогда его периметр равен  $a + 2b$ . Основание и боковая сторона второго треугольника равны, соответственно,  $1,15a$  и  $0,95b$ , а его периметр равен  $1,15a + 1,9b$ . В силу равенства периметров имеем  $a + 2b = 1,15a + 1,9b$ . Отсюда  $0,1b = 0,15a$ . Итак,  $a:b = 2:3$ .

7.3. Имеется семь гирек, о которых известно, что если убрать любую их них, то оставшиеся шесть гирек можно разложить на три группы, равные по весу. Обязательно ли все семь гирек одного веса?

**Ответ.** Необязательно. **Решение.** Можно привести такой пример: пусть веса гирек  $\{1, 1, 1, 1, 4, 4, 4\}$  (в граммах). Тогда, если убрать гирьку в 1 г, то на три группы разложим так:  $1+4=1+4=1+4$ , а если убрать 4 г, то  $1+1+1+1=4=4$ .

7.4. Даны три различных числа  $a$ ,  $b$  и  $c$ , среди которых есть число, большее 2022. Может ли оказаться так, что числа  $a^2 - b^2$ ,  $b^2 - c^2$  и  $c^2 - a^2$  представляют собой три последовательных целых числа?

**Ответ.** Может. **Решение.** Сумма чисел  $a^2 - b^2$ ,  $b^2 - c^2$  и  $c^2 - a^2$  равна нулю и поэтому при условии, что это последовательные целые числа, они должны быть равны  $(-1)$ ,  $0$  и  $1$ . Из равенства  $b^2 - c^2 = 0$  следует, что либо  $b = c$ , либо  $b = -c$ , но поскольку числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  должны быть различными, возможен лишь второй случай. Итак, пусть  $b = -c$ . Тогда из трёх уравнений  $a^2 - b^2 = -1$ ,  $b^2 - c^2 = 0$  и  $c^2 - a^2 = 1$  второе и третье автоматически следуют из первого. Если в уравнении  $(b-a)(b+a) = 1$  второй множитель взять достаточно большим, например, 10000, тогда первый будет равен 0,0001 и мы будем иметь два уравнения  $b+a = 10000$  и  $b-a = 0,0001$ . Отсюда  $2b = 10000,0001$  и  $2a = 9999,9999$ . Поскольку  $b > 2022$ , то полученные числа  $a$ ,  $b$  и  $c = -b$  удовлетворяют условиям.