# Межрегиональная олимпиада школьников «Будущие исследователи – будущее науки» по математике 2022/2023

**Отборочный тур.** ***Время выполнения заданий – 90 минут***

**Вариант 1.**

**8 класс**

**8.1.** У старшего брата путь до школы занимает 12 минут, а у младшего (по той же дороге) – 20 минут. Сколько минут пройдет с момента выхода из дома младшего брата до момента, когда его догонит старший, если он вышел на 5 минут позже младшего?

**Ответ.** Через 12,5 минут.

**Решение.** Пусть $S$ – расстояние от дома до школы. Так как младший брат проходит это расстояние за 20 минут, то за 5 минут он пройдет путь $\frac{5S}{20}=\frac{S}{4}$. После момента выхода из дома старшего брата скорость сближения братьев будет равна $\frac{S}{12}-\frac{S}{20}=\frac{S}{30}$. Для того, чтобы найти время с этого момента до встречи, разделим расстояние между ними на скорость сближения. Получим $\frac{S}{4}:\frac{S}{30}=7{,}5$ (минут). С учетом задержки на 5 минут, получаем ответ 12,5 минут (и поскольку это меньше 20 минут, старший брат успевает догнать младшего).

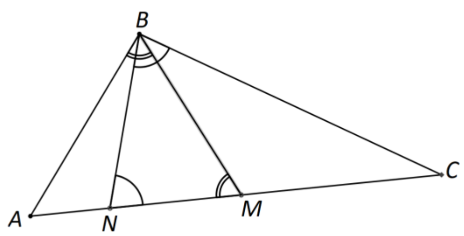
**8.2**. В десятичной записи натурального числа $N$ между второй и третьей цифрами справа вставили 0 и получили $9N$. Чему может равняться $N$? (укажите все возможные значения).

**Ответ**. 225; 450; 675.

**Решение.** Пусть $x$ – третья цифра справа числа $N$. Двузначное число, составленное из последних двух цифр числа $N$, обозначим через $B$, а число, полученное из $N$, если стереть его последние три цифры обозначим через $A$. Таким образом, $N = 1000A + 100x + B$. Новое число, полученное после того, как вставили цифру 0, будет равно $10000A + 1000x + B$. Из условий задачи получаем уравнение $10000A + 1000x + B = 9000A + 900x + 9B$, т.е. $1000A + 100x = 8B$. Если $A \neq 0$, то в левой части последнего уравнения стоит число не меньше 1000, а в правой – меньше 800. Значит, $A$=0 и уравнение упрощается: $25x = 2B$ . Следовательно, $B$ – двузначное число, кратное 25 (при $B$=0 число $N$=0 не является натуральным). Итак, возможно три варианта: либо $B$=25. либо $B$=50. либо $B$=75. Соответствующая цифра $x$ равна 2 или 4 или 6.

**8.3**. Дан треугольник $ABC$. На стороне $AC$, наибольшей в треугольнике, отмечены точки $M$ и $N$ такие, что $AM=AB$ и $CN=CB$. Оказалось, что угол $NBM$ в три раза меньше угла $ABC$. Найдите $\angle ABC$.

**Ответ.** 108°.




**Решение.** Точка $N$ лежит между $A$ и $M$, т.к. $AM+CV=AB+BC > AC$. Пусть $\angle NBM = x$, тогда $\angle ABM + \angle NBC = \angle ABC + \angle NBM = 3x+x=4x$. По условию, треугольники $ABM$ и $NBC$ равнобедренные, и поэтому $\angle ABM + \angle NBC = \angle BMN + \angle BNM = 180° - \angle NBM = 180° - x$. Таким образом, имеем уравнение $4x = 180° - x$, отсюда, $x = 36°$ и $\angle ABC = 3x = 108°$.

**8.4**. В спортзале по кругу в произвольном порядке встали 10 мальчиков и 10 девочек. Сможет ли тренер начертить мелом на полу 10 непересекающихся отрезков так, чтобы каждый из них соединял мальчика и девочку (при любом расположении ребят)?

**Ответ.** Сможет.

**Решение.** Будем рассматривать такую модель задачи: на окружности отмечены 10 точек с буквой м (мальчики) и 10 точек с буквой д (девочки). Требуется провести 10 непересекающихся хорд, на концах каждой из которых разные буквы (м – д). Первую хорду проведем между парой соседних (по окружности) разных букв: очевидно, такая пара (даже две пары) существует. Далее выкинем мысленно эту пару из рассмотрения и будем считать, что на окружности 9 букв м и 9 букв д, т.е. сотрем на время первую хорду и её концы. С оставшимися 18 буквами поступаем точно так же, соединяя хордой соседние разные буквы. Заметим, что новая хорда не пересекает первую, т.к. между концами первой хорды букв нет. Далее аналогично выкидываем из рассмотрения уже построенные хорды и их концы и строим новую хорду между соседними оставшимися разными буквами. Последняя, 10-я хорда соединит единственную пару разных букв, после чего восстановим стертые ранее хорды.

**Вариант 2**

**8 класс**

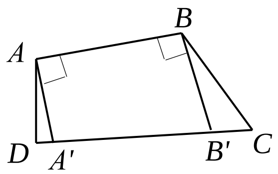
**8.1.** Два автомобиля едут по шоссе со скоростью 80 км/ч и с интервалом 10 м. У знака ограничения скорости машины мгновенно снижают скорость до 60 км/ч. С каким интервалом они будут двигаться после знака ограничения?

**Ответ.** 7,5 м**.**

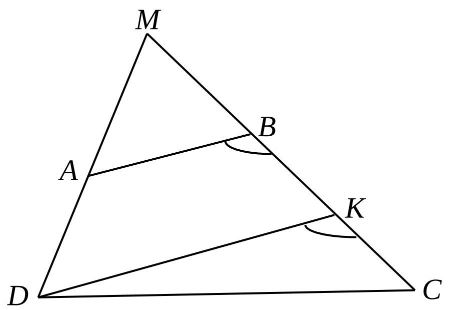
**Решение.** Пусть $v$ (м/час) – скорость машин до знака, $u$ (м/час) – скорость машин после знака. Вторая машина проедет знак позже первой на $10/v$ (час). За это время первая машина проедет $10u/v$ (метров) = $10\cdot6/8$ = 7,5 метров. Этот интервал и будет сохраняться после знака. *Комментарий. Как следует из решения, результат зависит лишь от отношения u/v, поэтому переводить скорости в другие единицы измерения необязательно..*

**8.2.** Дан выпуклый четырехугольник *ABCD*. Можно ли утверждать, что $AB < CD$, если **а)** углы *A* и *B* тупые; **б)** угол *A* больше угла *D*, а угол *B* больше угла *C*?

**Ответ. а)** можно; **б)** можно.




**Решение. а)** Ниже из решения пункта **б)** следует и пункт **а)**, но для пункта **а)** можно привести более простое решение. Восставим перпендикуляры к прямой *AB* из точек *A* и *B* до пересечения с прямой *DC*. Пусть *A'* и *B'* – точки пересечения. Таким образом, отрезок *AB* есть проекция отрезка *A'B'* на прямую *AB*. Поскольку углы *A* и *B* тупые, построенные перпендикуляры пройдут внутри углов *DAB* и *CBA* и попадут внутрь отрезка *DC*. Значит, $DC > A'B' \geq AB$ (т.к. длина проекции не превосходит длины проектируемого отрезка). **б)** Углы *A, B, C, D* обозначим через $\alpha, \beta, \chi, \delta$, соответственно, Поскольку $\alpha+\beta+\chi+\delta = 360°$ и $\chi+\delta < \alpha+\beta$, то $\chi+\delta < 180°$ и значит, прямые *DA* и *CB* пересекаются в точке, скажем, *M*, лежащей в той же полуплоскости (относительно прямой *DC*), что и четырехугольник *ABCD*. Рассмотрим $\Delta DMC$. На его сторонах *DM* и *CM* лежат точки *A* и *B*. Если *AB*||*DC*, то утверждение задачи очевидно, т.к. $\Delta AMB$ подобен $\Delta DMC$ с коэффициентом подобия меньше единицы. Если же отрезки *AB* и *DC* не параллельны, то $\alpha+\delta \neq 180°$, $\beta+\chi \neq 180°$ и поэтому верно хотя бы одно из строгих неравенств: $\delta > 180° - \alpha$ или $\gamma > 180° - \beta$ (иначе сложение неравенств $\alpha+\delta < 180°$ и $\beta+\chi < 180°$ приводит к противоречию с равенством $\alpha+\beta+\chi+\delta = 360°$). Пусть, для определенности, $\delta > 180° - \alpha$. Проведем через точку *D* луч, параллельный *AB* (в той же полуплоскости относительно прямой *DA*, где лежит *ABCD*.), Тогда он пройдет внутри угла *ADC* и пересечет отрезок *BC* в некоторой внутренней точке, скажем, *K*. Значит, треугольники *AMB* и *DMK* подобны, поэтому *AB* < *DK*. Но в $\Delta DKC$ угол *DKC* равен $\beta$ (по свойству параллельных *AB* и *DK*, пересеченных прямой *MC*). Следовательно, в $\Delta DKC$ против угла *DKC*, большего, чем угол *C*, лежит сторона *DC* > *DK*. Итак, *DC* > *DK* > *AB*.




**8.3**. Имеется 10 гирек, о которых известно, что если убрать любую их них, то оставшиеся 9 гирек можно разложить на три группы, равные по весу. Обязательно ли все 10 гирек одного веса?

**Ответ**. Не обязательно.

**Решение.** Можно привести такой пример: пусть есть семь гирек по 1 г и три гирьки по 7 г. Тогда, если убрать гирьку 1 г, то разложим так: 1+1+7 = 1+1+7 = 1+1+7, а если убрать 7 г, то 1+1+1+1+1+1+1 = 7 = 7.

**8.4**. Даны три различных числа *a*, *b* и *c*, среди которых есть число, большее 2022. Может ли оказаться так, что числа $a^2-b^2$, $b^2-c^2$ и $c^2-a^2$ представляют собой три последовательных целых числа?

**Ответ**: может.

**Решение.** Сумма чисел $a^2-b^2$, $b^2-c^2$ и $c^2-a^2$ равна нулю и поэтому при условии, что это последовательные целые числа, они должны быть равны (–1), 0 и 1. Из равенства $b^2-c^2=0$ следует, что либо $b=c$, либо $b=-c$, но поскольку числа *a*, *b* и *c* должны быть различными, возможен лишь второй случай. Итак, пусть $b=-c$. Тогда из трёх уравнений $a^2-b^2=-1$, $b^2-c^2=0$ и $c^2-a^2=1$ второе и третье автоматически следуют из первого. Если в уравнении $(b-a)(b+a)=1$ второй множитель взять достаточно большим, например, 10000, тогда первый будет равен 0, 0001 и мы будем иметь два уравнения $b+a=10000$ и $b-a=0{,}0001$. Отсюда $2b=10000{,}0001$ *и* $2a=9999{,}9999$. Поскольку $b > 2022$, то полученные числа *a*, *b* и $c = -b$ удовлетворяют условиям.