Межрегиональная олимпиада школьников «Будущие исследователи – будущее науки» по математике 2022/2023

Отборочный тур. ***Время выполнения заданий – 90 минут***

Вариант 1

9 класс

9.1. К восьмизначному числу 20222023 припишите слева и справа по цифре так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 72. (Укажите все возможные решения.)

Ответ. 3202220232.

Решение. Поскольку $72 = 8\cdot 9$, то требуется приписать цифры так, чтобы полученное число делилось и на 8, и на 9. Делимость на 8 определяется тремя последними цифрами: значит, к двузначному числу 23 надо приписать справа цифру, чтобы получилось трёхзначное число, кратное 8. Есть только одна цифра, а именно двойка, для которой это возможно (232:8 = 29). После этого первую цифру искомого числа определяем по признаку делимости на 9 (сумма цифр должна делиться на 9, поэтому к имеющейся сумме цифр, равной 15, надо добавить 3).

9.2. Число a является корнем квадратного уравнения $x^2 - x - 100 = 0$. Найдите значение $a^4 - 201a$.

Ответ. 10100.

Решение. Возводя в квадрат выражение $a^2 = a + 100$, получим $a^4 = a^2 + 200a + 10000 = a + 100 + 200a + 10000 = 201a + 10100$. Отсюда получаем ответ.

9.3. Дан четырехугольник $ABCD$, около которого описана окружность радиуса R. Можно ли утверждать, что если $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 8R^2$, то хотя бы одна из диагоналей четырехугольника является диаметром описанной окружности?

Ответ: нет, нельзя.

Решение. Для примера можно рассмотреть вписанный четырехугольник со взаимно перпендикулярными диагоналями, отличными от диаметров. К такому примеру можно придти, если ввести угловые величины дуг α, β, γ, δ, на которые разбивается окружность. Тогда $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 4R^2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} + \sin^2\frac{\delta}{2}\right)$. В скобках число 2 получается не только при условии $\alpha + \beta = \gamma + \delta = 180°$, но и в том случае, когда $\alpha+\gamma=\beta+\delta= 180°$. Это соответствует случаю вписанного четырехугольника со взаимно перпендикулярными диагоналями, т.к. по свойству угла между хордами, прямой угол между диагоналями равен тогда $(\alpha+\gamma)/2 =(\beta+\delta)/2$. *Комментарий. К подобному примеру можно придти без тригонометрии: рассмотрим сначала четырехугольник ABCD, у которого диагональ AC является диаметром, а затем вместо точки A возьмем симметричную ей относительно диаметра, перпендикулярного BD, точку A'. Тогда четырехугольник A'BCD искомый.*

9.4. **а**) Даны натуральные числа a и b. Можно ли утверждать, что они имеют одинаковые остатки при делении на 10, если известно, что числа $3a + b$ и $3b + a$ имеют одинаковые остатки при делении на 10? **б**) Даны натуральные числа a, b и c. Известно, что у чисел $2a + b$, $2b + c$ и $2c + a$ остатки при делении на 10 одинаковые. Докажите, что у чисел a, b и c остатки при делении на 10 тоже одинаковые.

Ответ. а) нет, нельзя.

Решение. а) Можно взять, например, $a = 1$ и $b = 6$, тогда оба числа $3a + b$ и $3b + a$ имеют остаток 9. **б**) Пусть $s = a + b + c$. Уменьшая каждое из чисел $2a + b$, $2b + c$ и $2c + a$ на s, получим числа $a - c$, $b - a$, $c - b$ (некоторые из них могут быть отрицательными), причём у этих чисел одинаковый остаток, скажем x, при делении на 10. Заметим, что сумма чисел $a - b$, $b - c$, $c - a$ равна нулю, а с другой стороны, сумма их остатков при делении на 10 равна $3x$. Значит, (поскольку 3 и 10 взаимно просты) $x = 0$. (*Комментарий. Напомним, что остаток при делении целого числа n на натуральное m – это такое неотрицательное целое r, меньшее m, для которого n – r делится на m.*)

Вариант 2

9 класс

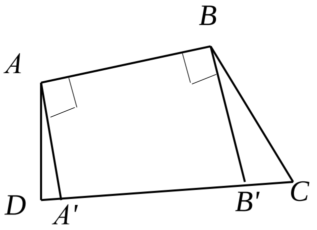
9.1. Докажите неравенство $|a-1|\le a^2-a+1$.

<u>Решение</u>. При $a\ge 1$ неравенство принимает вид $a-1\le a^2-a+1 \Leftrightarrow (a-1)^2+1\ge 0$. При $a<1$ неравенство запишется так: $-a+1\le a^2-a+1 \Leftrightarrow a^2\ge 0$. В обоих случаях получили верные (очевидные) неравенства, и таким образом, при всех a исходное неравенство выполняется..

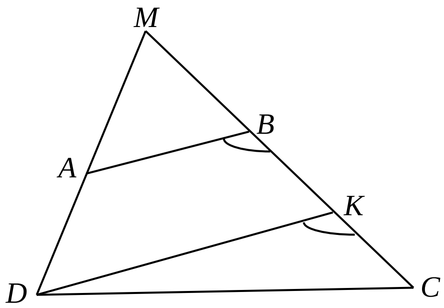
9.2. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Можно ли утверждать, что $AB < CD$, если **а)** углы A и B тупые; **б)** угол A больше угла D, а угол B больше угла C?

<u>Ответ</u>. а) можно; б) можно**.**

<u>Решение</u>. <u>Ответ</u>. а) можно; **б)** можно. **<u>Решение</u>. а)** Ниже из решения пункта **б)** следует и пункт **а)**, но для пункта **а)** можно привести более простое решение. Восставим перпендикуляры к прямой AB из точек A и B до пересечения с прямой DC. Пусть A' и B' – точки пересечения. Таким образом, отрезок AB есть проекция отрезка $A'B'$ на прямую AB. Поскольку углы A и B тупые, построенные перпендикуляры пройдут внутри углов DAB и CBA и попадут внутрь отрезка DC. Значит, $DC > A'B' \ge AB$ (т.к. длина проекции не превосходит длины проектируемого отрезка). **б)** Углы A, B, C, D обозначим через α,β,χ,δ, соответственно, Поскольку $\alpha+\beta+\chi+\delta=360°$ и $\chi+\delta<\alpha+\beta$, то $\chi+\delta<180°$ и значит, прямые DA и CB пересекаются в точке, скажем, M, лежащей в той же полуплоскости (относительно прямой DC), что и четырехугольник $ABCD$.



Рассмотрим ΔDMC. На его сторонах DM и CM лежат точки A и B. Если $AB\|DC$, то утверждение задачи очевидно, т.к. ΔAMB подобен ΔDMC с коэффициентом подобия меньше единицы. Если же отрезки AB и DC не параллельны, то $\alpha+\delta\ne 180°$, $\beta+\chi\ne 180°$ и поэтому верно хотя бы одно из строгих неравенств: $\delta>180°-\alpha$ или $\gamma>180°-\beta$ (иначе сложение неравенств $\alpha+\delta<180°$ и $\beta+\chi<180°$ приводит к противоречию с равенством $\alpha+\beta+\chi+\delta=360°$). Пусть, для определенности, $\delta>180°-\alpha$. Проведем через точку D луч, параллельный AB (в той же полуплоскости относительно прямой DA, где лежит $ABCD$.), Тогда он пройдет внутри угла ADC и пересечет отрезок BC в некоторой внутренней точке, скажем, K.



Значит, треугольники AMB и DMK подобны, поэтому $AB < DK$. Но в ΔDKC угол DKC равен β (по свойству параллельных AB и DK, пересеченных прямой MC). Следовательно, в ΔDKC против угла DKC, большего, чем угол C, лежит сторона $DC > DK$. Итак, $DC > DK > AB$.

9.3. Обозначим через $s(n)$ сумму цифр натурального числа n (в десятичной записи). Существует ли такое n, что $n\cdot s(n)=20222022$?

<u>Ответ</u>. Не существует.

<u>Решение</u>. По признаку делимости на 3 и на 9 числа n и $s(n)$ либо оба делятся на 3 (на 9), либо оба не делятся на 3 (соответственно, на 9). Рассмотрим сначала первый случай, когда n и $s(n)$ делятся на 3. Тогда произведение $n\cdot s(n)$ делится на 9. Во втором случае n и $s(n)$ не делятся на 3, и тогда произведение $n\cdot s(n)$ не делится на 3. Однако число 20222022 делится на 3, но не делится на 9, т.к. сумма цифр этого числа равна 12. Значит, такого n не существует.

9.4. В некоторые клетки квадратной таблицы 8×8 поставили знак "плюс". Докажите, что найдутся два (возможно, пересекающиеся) квадрата 4×4, в которых одинаковое количество плюсов.

<u>Решение</u>. Подсчитаем сначала количество квадратов 4×4 в таблице 8×8. Каждый такой квадрат однозначно определяется положением своей левой нижней вершины. Этой вершиной может быть любая узловая точка той части таблицы, которая останется, если из таблицы 8×8 отрезать сверху и справа каемку в 4 клетки: останется левый нижний квадрат размера 4×4. В таком квадрате $5^2=25$ узловых точек. Итак, имеется 25 квадратов 4×4. Различных вариантов (по количеству плюсов) заполнения квадрата 4×4 имеется всего 17 (число плюсов – от 0 до 16). Поскольку 25>17, найдутся хотя бы два квадрата 4×4 с одинаковым количеством плюсов.