Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки» по математике 2023/2024 уч.г.

Финальный тур.

Время выполнения заданий 180 минут.

Каждая из пяти задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 20 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов.

10 класс

10.1. Найдите наименьшее возможное значение суммы $x + y + z$ трех положительных чисел x, y, z, удовлетворяющих соотношению $xy + yz + xz = 27$.

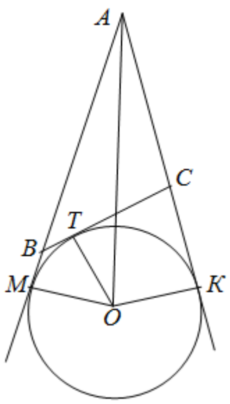
Ответ: 9.

Решение. Имеем: $(x+y+z)^2 = \frac{1}{2}(2x^2+2y^2+2z^2)+2(xy+yz+xz) \geq xy+yz+xz+$ $+2(xy+yz+xz)=3\cdot 27=81.$ Учитывая положительность $x + y + z$, получаем оценку $x + y + z \geq 9$. При $x = y = z = 3$ будем иметь (единственный) пример искомых чисел.

10.2. Дан треугольник ABC периметра P с углом A, равным α. Найдите радиус вневписанной окружности, касающейся BC и продолжений сторон AB и AC.

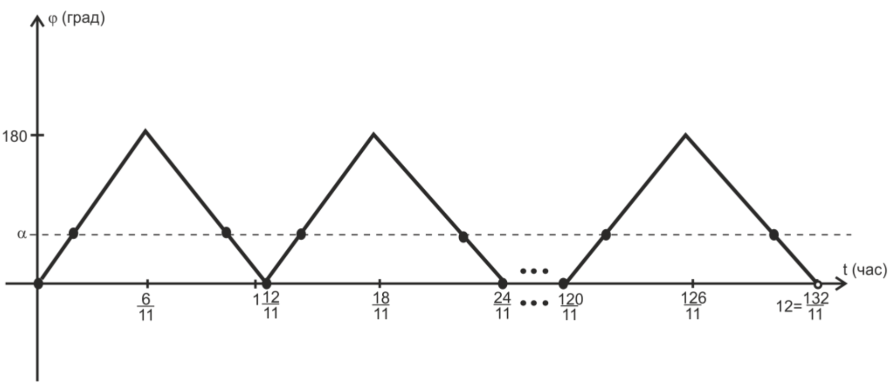
Ответ: $\frac{P}{2}\cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Решение. Пусть O – центр вневписанной окружности, T – точка касания окружности со стороной BC, M и K – точки касания окружности с продолжениями сторон AB и AC соответственно. По свойству отрезков касательных $BM = BT$, $CT = CK$, $AM = AK$. Так как $BC = BT + TC = BM + CK$, то $P = AB + AC + BC = AM + AK = 2AM$, откуда $AM = 0{,}5P$. Так как O – центр вневписанной окружности, то AO – биссектриса угла MAK. Поэтому $\angle MAO = 0{,}5\alpha$. Поскольку $OM \perp AM$ по свойству радиуса, проведенного в точку касания, в прямоугольном треугольнике MAO имеем $OM = AM \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{P}{2}\cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.



10.3. Для всех действительных параметров $a \in [0; 180]$ определите, сколько раз в течение суток угол между часовой и минутной стрелками часов составляет a градусов. (Угол между стрелками понимается как угол между векторами и принимает значения от 0 до 180 градусов).

Ответ: 22 раза при $a = 0$ и $a = 180$; 44 раза при $0 < a < 180$. **Решение.** Построим график зависимости от времени t (час) угла φ **(**град**)** между стрелками. Наклон графика (по абсолютной величине) равен относительной угловой скорости минутной стрелки относительно часовой, т.е. 330 град/час. На графике отмечено время от 0 до 12 часов; в следующие 12 часов ситуация повторяется. Когда значение функции становится равным 180°, возрастание сменяется на убывание – по смыслу угла φ**.** Таким образом, функция $\varphi(t)$ имеет наименьший период 12/11**,** и на полуинтервале [0, 12) укладывается ровно 11 полуинтервалов длины периода. С помощью построенного графика, получаем ответ. *Комментарии.* 1) *Ответ* 22 *для* $a = 0$ *соответствует тому, что момент* 24 *часа относится уже к новым суткам; впрочем, и ответ* 23 *для* $a = 0$ *можно понять и не считать ошибкой.* 2) *Можно прийти к тем же результатам и без графика, рассматривая, как меняется угол* φ *каждый час, но это более трудоемкая задача.* 3) *Поскольку* $\varphi(t)$ *имеет период (не наименьший) 12 часов, то можно начинать отсчет не с 0 часов, а с произвольного момента времени, и тогда в течение 24 часов получим те же результаты.* 4) *Имеет смысл сравнить графики из решений задач* 10.3 *и* 11.2.



10.4. Можно ли утверждать, что если для рациональных чисел a, b, c сумма $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c\sqrt{6}$ является рациональным числом, то $a = b = c = 0$?

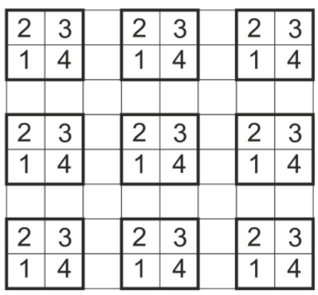
Ответ: можно. **Решение**. Пусть

$$a\sqrt{2}+b\sqrt{3}=-c\sqrt{6}+d\,, \qquad (*)$$

где a, b, c, d – рациональные числа. После возведения в квадрат уравнения (∗) и выделения рациональных слагаемых и множителя перед $\sqrt{6}$ получим два соотношения: $ab=-cd$ и $2a^2 + 3b^2 = 6c^2 + d^2$, т.к. $\sqrt{6}$ – иррациональное число. Значит, пара чисел $(2a^2, 3b^2)$ и пара чисел $(6c^2, d^2)$ имеют одинаковые и сумму, и произведение. Поэтому (по обратной теореме Виета) они являются корнями одного квадратного уравнения и совпадают с точностью до порядка. Приравнивая эти пары (в том и другом порядке), получаем в силу иррациональности $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$, что равенство (∗) возможно лишь для нулевого набора a, b, c, d.

10.5. В клетчатом квадрате 8×8 две клетки одной строки или столбца назовем *диполем*, если между ними ровно две клетки. Петя решил отметить как можно больше диполей, закрашивая разными цветами разные диполи (а обе клетки одного и того же диполя – одним цветом). Какое наибольшее количество диполей он сможет закрасить?

Ответ: 30. **Решение.** Рассмотрим в нашем квадрате 9 квадратов 2×2 (см. рис.), назовём их *выделенными*. Заметим, что если одна клетка некоторого диполя принадлежит какому-то выделенному квадрату, то другая клетка этого диполя принадлежит (соседнему) выделенному квадрату. На рисунке отмечены номерами 1, 2, 3, 4 клетки в выделенных квадратах, так что у любого диполя обе клетки должны иметь один и тот же номер. Но клеток с данным номером (например, с номером 1) девять, и поэтому при «распределении» клеток с номером 1 по диполям по меньшей мере одна клетка окажется нераспределённой (лишней). Таким



образом, для каждого из четырех номеров остаётся нераспределённой минимум одна клетка среди выделенных квадратов, а значит, всего имеется минимум 4 нераспределенные клетки. Получаем оценку: максимальное число непересекающихся диполей во всём квадрате 8×8 не больше (64 – 4)/2 = 30. Построим теперь пример на 30 диполей. Для этого «отрежем» левый нижний выделенный квадрат. Останется клетчатая фигура из 60 клеток, которая разбивается на квадрат 6×6 и два прямоугольника 6×2 и 2×6. Эта фигура полностью разбивается на диполи, поскольку любые последовательные 6 клеток строки или столбца, очевидно, разбиваются на три диполя.