Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки» по математике 2023/2024 уч.г.

Финальный тур.

Время выполнения заданий 180 минут.

Каждая из пяти задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 20 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов.

11 класс

11.1. Дан треугольник ABC, в который вписана окружность с центром O. Пусть M и N – точки касания вписанной окружности со сторонами AB и AC. Известно, что $AO = 2\cdot MN$. Найдите $\angle A$.

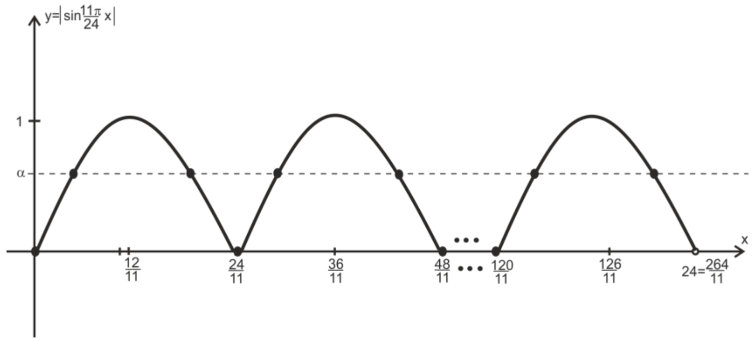
Ответ. 30° или 150°.

Решение. Пусть K – точка пересечения отрезков AO и MN. По свойству вписанной окружности, $MK = KN$, $MK \perp AK$ и $\angle AMO = 90°$. Обозначим $\alpha = \angle MAO = \angle NAO$, тогда $\angle A = 2\alpha$. В прямоугольном треугольнике AMK имеем: $MK = AM\cdot\sin\alpha = (AO\cdot\cos\alpha)\cdot\sin\alpha$, и по условию, $2(2AO\cos\alpha\sin\alpha) = AO \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\alpha = 30°$ либо $2\alpha = 150°$.

11.2. Для всех действительных параметров $a \in [0;\, 1]$ определите число корней уравнения $\left|\sin\frac{11\pi}{24}x\right| = a$ на полуинтервале $[0;\, 24)$.

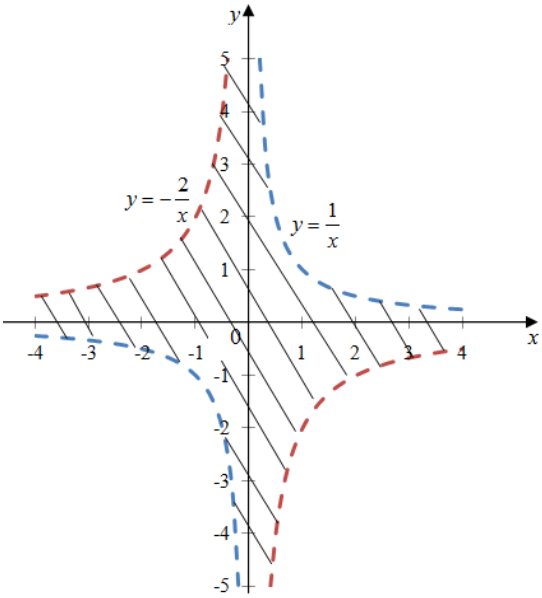
Ответ: 11 корней при $a = 0$ и $a = 1$; 22 корня при $0 < a < 1$.

Решение. График функции $y = \left|\sin\frac{11\pi}{24}x\right|$ можно получить из графика $y = |\sin t|$ при изменении масштаба по оси абсцисс, что соответствует линейной замене переменных $t = \frac{11\pi}{24}x$. Поскольку период функции $y = |\sin t|$ равен π, у данной функции период равен 24/11, и её график показан на чертеже. Учитывая тот факт, что на полуинтервале [0; 24) укладывается ровно 11 полуинтервалов длины периода, получаем ответ. *Комментарий. Имеет смысл сравнить графики из решений задач* 10.3 *и* 11.2.



11.3. **а)** Изобразите на координатной плоскости множество A, заданное неравенством $x^2y^2 < 2 - xy$. **б)** Докажите, что любые две точки множества A можно соединить внутри A либо отрезком, либо ломаной из двух звеньев.

Решение. а) $x^2y^2 < 2 - xy \Leftrightarrow x^2y^2 + xy - 2 < 0 \Leftrightarrow (xy+2)(xy-1) < 0 \Leftrightarrow -2 < xy < 1$. Очевидно, ось ординат принадлежит множеству *A*. Для $x > 0$ последнее двойное неравенство равносильно такому: $-2/x < y < 1/x$, т.е. в правой полуплоскости множество *A* ограничено двумя ветвями гипербол: снизу $y = -2/x$ и сверху $y = 1/x$. Аналогично, для $x < 0$ имеем $1/x < y < -2/x$ — это соответствующие ветви гипербол, ограничивающим множество *A* в левой полуплоскости. В результате получаем множество, заштрихованное на рисунке. **б)** Пусть *B* – точка, принадлежащая множеству *A*. Покажем, что весь отрезок *BO*, где *O* – начало координат, принадлежит *A*. Это очевидно для точки *B* на координатных осях. Если *B* не принадлежит осям, то прямая *OB* задается уравнением $y = kx$, $k \neq 0$. Пусть *B* имеет координаты (x_0, kx_0), тогда $(kx_0^2 + 2)(kx_0^2 - 1) < 0$. При всех *k* первая скобка положительна, а вторая отрицательна (т.к. при $k > 0$ первая скобка, очевидно, положительна, а значит, вторая отрицательна; при $k < 0$ вторая скобка, очевидно, отрицательна, а значит, первая положительна). Любая точка отрезка *OB* имеет координаты (px_0, pkx_0), где $p \in [0; 1]$. Проверим, что $(kp^2x_0^2 + 2)(kp^2x_0^2 - 1) < 0$ при всех $p \in [0; 1]$. Действительно, первая скобка остаётся положительной, а вторая отрицательной: чтобы проверить неравенство $kp^2x_0^2 + 2 > 0$, домножим неравенство $kx_0^2 > -2$ на p^2 (можно считать, что $p \in (0; 1)$), тогда получим $kp^2x_0^2 > -2p^2 > -2$. Аналогично проверяется отрицательность второй скобки. Если две точки из множества *A* и начало координат *O* лежат на одной прямой, то соединим эти две точки отрезком, и по доказанному выше, весь отрезок принадлежит *A*. В остальных случаях ломаная, состоящая из двух отрезков с общим концом *O*, принадлежит множеству *A*. *Комментарий. Доказать тот факт, что отрезок OB целиком принадлежит A, можно по-другому, не опираясь на конкретные формулы гипербол, а используя лишь общее свойство монотонности ветвей в каждой четверти* (*точнее, убывания в* 1-*й и* 3-*й четвертях и возрастания во* 2-*й и* 4-*й*). *Конечно, после того, как множество A изображено на координатной плоскости, данный факт становится почти очевидным. Однако формальное доказательство важно, т.к. иногда наглядные иллюстрации для кривых, свойства которых не исследованы аналитически, могут ввести в заблуждение.*



11.4. Можно ли утверждать, что если для рациональных чисел *a*, *b*, *c* сумма $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6}$ является рациональным числом, то $a = b = c = 0$?

Ответ: можно.

Решение. Пусть

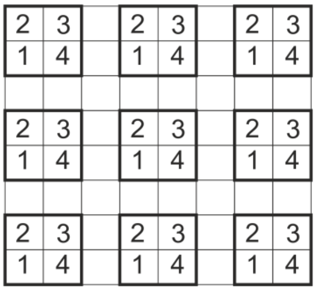
$$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = -c\sqrt{6} + d, \qquad (*)$$

где *a*, *b*, *c*, *d* – рациональные числа. После возведения в квадрат уравнения (∗) и выделения рациональных слагаемых и множителя перед $\sqrt{6}$ получим два соотношения: $ab = -cd$ и $2a^2 + 3b^2 = 6c^2 + d^2$, т.к. $\sqrt{6}$ – иррациональное число. Значит, пара чисел $(2a^2, 3b^2)$ и пара чисел $(6c^2, d^2)$ имеют одинаковые и сумму, и произведение. Поэтому (по обратной теореме Виета) они являются корнями одного квадратного уравнения и совпадают с точностью до порядка. Приравнивая эти пары (в том и другом порядке), получаем в силу иррациональности $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$, что равенство (∗) возможно лишь для нулевого набора *a*, *b*, *c*, *d*.

11.5. В клетчатом квадрате 8×8 две клетки одной строки или столбца назовем *диполем*, если между ними ровно две клетки. Петя решил отметить как можно больше диполей, закрашивая разными цветами разные диполи (а обе клетки одного и того же диполя – одним цветом). Какое наибольшее количество диполей он сможет закрасить?

Ответ. 30.

Решение. Рассмотрим в нашем квадрате 9 квадратов 2×2 (см. рис.), назовём их *выделенными*.



Заметим, что если одна клетка некоторого диполя принадлежит какому-то выделенному квадрату, то другая клетка этого диполя принадлежит (соседнему) выделенному квадрату. На рисунке отмечены номерами 1, 2, 3, 4 клетки в выделенных квадратах, так что у любого диполя обе клетки должны иметь один и тот же номер. Но клеток с данным номером (например, с номером 1) девять, и поэтому при «распределении» клеток с номером 1 по диполям по меньшей мере одна клетка окажется нераспределённой (лишней). Таким образом, для каждого из четырех номеров остаётся нераспределённой минимум одна клетка среди выделенных квадратов, а значит, всего имеется минимум 4 нераспределенные клетки. Получаем оценку: максимальное число непересекающихся диполей во всём квадрате 8×8 не больше $(64 – 4)/2 = 30$. Построим теперь пример на 30 диполей. Для этого «отрежем» левый нижний выделенный квадрат. Останется клетчатая фигура из 60 клеток, которая разбивается на квадрат 6×6 и два прямоугольника 6×2 и 2×6. Эта фигура полностью разбивается на диполи, поскольку любые последовательные 6 клеток строки или столбца, очевидно, разбиваются на три диполя.