Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки» по математике 2023/24 уч.г.

Финальный тур.

Время выполнения заданий 180 минут.

Каждая из пяти задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 20 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов.

7 класс

7.1. Может ли сумма n последовательных натуральных чисел равняться 2024 **а**) при $n = 11$? **б**) при $n = 10$?

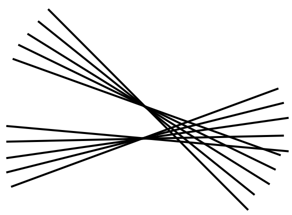
Ответ: а) может; **б**) не может. **Решение**. **а**) Найдём сумму 11 последовательных натуральных чисел: $m + (m + 1) + (m + 2) + (m + 3) + (m + 4) + (m + 5) + (m + 6) + (m + 7) + (m + 8) + (m + 9) + (m + 10) = \; = 11m + 55 = 11(m + 5)$. Получаем уравнение $11(m + 5) = 2024$, отсюда $m + 5 = 184$, т.е. $m = 179$. Можно непосредственно проверить, что сумма 11 последовательных чисел $179 + 180 + \ldots + 189$ равна 2024. **б**) Сумма 10 последовательных натуральных чисел равна $m + (m + 1) + (m + 2) + (m + 3) +$
$+ (m + 4) + (m + 5) +(m + 6) + (m + 7) + (m + 8) + (m + 9) = 10m + 45 = 5(2m + 9)$. В уравнении $5(2m + 9) = 2024$ левая часть делится на 5, а правая не делится. Следовательно, сумма десяти последовательных натуральных чисел не может равняться 2024.

7.2. Из пункта A в пункт B велосипедист с постоянной скоростью ехал 3 часа. На обратном пути велосипедист увеличил скорость на 25%, а доехав до середины пути, увеличил скорость еще на 20%. Сколько времени занял обратный путь?

Ответ: 2 часа 12 минут. **Решение**. Пусть длина пути из A в B равна a (км), а скорость движения из A в B равна v (км/ч). Тогда $\frac{a}{v} = 3$. Пусть C – середина пути между A и B. Тогда время движения на обратном пути от B до C равно $\frac{a/2}{v \cdot 1{,}25} = \frac{2a}{5v} = \frac{6}{5}$ (час), а время движения от C до A равно $\frac{a/2}{v \cdot 1{,}25 \cdot 1{,}2} = \frac{a}{3v} = 1$ (час). Итак, время обратного пути $\frac{6}{5} + 1 = \frac{11}{5}$ (час).

7.3. Может ли оказаться у 10 прямых на плоскости ровно а) 50 точек пересечения? б) 27 точек пересечения?

Ответ: а) не может; **б**) может. **Решение. а**) Максимальное количество точек пересечения у десяти прямых будет в том случае, когда любые две прямые пересекаются, а любые три прямые не пересекаются в одной точке. Таким образом, в случае такого максимального числа пересечений, на каждой прямой будет 9 точек пересечения. Тем самым, если считать по всем прямым, то получится 10·9=90 точек. Но при таком подсчете каждая точка засчитана дважды. Поэтому всего будет 45 точек, и значит, 50 точек пересечения не может получиться. (Можно привести другой способ подсчета: будем проводить последовательно прямые и считать точки пересечения с ранее проведенными прямыми, тогда получим $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45$ точек). **б)** Поскольку $27 = 5 \cdot 5 + 2$, то можно поступить следующим образом: проведем пять прямых через одну очку, а другие пять прямых (не параллельных проведенным прямым) – через другую точку (см. рис.).



7.4. На столе стоят n стаканов с водой, в них произвольное количество воды. За одно переливание можно выбрать любые два стакана и уравнять в них количество воды. Всегда ли удастся за несколько переливаний уравнять количество воды во всех стаканах **а)** при $n = 32$; **б**) при $n = 30$?

Ответ: а) всегда; **б**) не всегда. **Решение. а)** Сгруппируем стаканы по парам и за 16 переливаний уравняем воду в каждой паре. Далее сформируем две группы стаканов, взяв по одному стакану из каждой пары. У нас получится две одинаковых (по количеству воды) группы стаканов по 16 стаканов в каждой. Точно так же в обеих группах мы можем проделать по 8 переливаний и после разделений на группы получить 4 одинаковых (по количеству воды) группы по 8 стаканов в каждой. Проделав такую же процедуру в каждой из 4 групп, получим 8 групп по 4 стакана, затем 16 групп по 2 стакана и, наконец, уравняем воду в каждом из двух стаканов во всех (одинаковых) 16 группах. **б**) Если взять два стакана с m (грамм) и n (грамм) воды в них, то после одного переливания в обоих стаканах будет по $(m+n)/2$ грамм воды. Далее, если в двух стаканах количество воды имеет вид дробей (не обязательно несократимых) со знаменателем 2, то после переливания в обоих стаканах количество воды будет дробью со знаменателем 4, и т.д. Поэтому если изначально количество воды в стаканах выражалось натуральными числами (в граммах), то после нескольких переливаний количество воды в стаканах будет иметь вид $\frac{k}{2^N}$, где k и N – натуральные числа, вообще говоря, зависящие от номера стакана. Рассмотрим пример. Пусть вначале в 29 стаканах было по 100 грамм воды, а в 30-м стакане 150 грамм. Предположим, от противного, что после переливаний можно уравнять воду во всех стаканах. В каждом стакане тогда в результате должно стать по $\frac{3050}{30}=101\frac{2}{3}$ (грамм). Таким образом, должно иметь место равенство $\frac{305}{3}=\frac{k}{2^N}$ при некоторых натуральных k и N. Отсюда $305\cdot 2^N=3k$. Но левая часть не делится на 3. Полученное противоречие показывает, что уравнять количество воды не удастся. *Комментарий. Можно обобщить результат задачи в виде такого утверждения: уравнять воду в n стаканах при любом начальном распределении удаётся только тогда, когда n – степень двойки.*

7.5. Вася написал на доске по кругу белым мелом несколько чисел (не меньше двух). Затем красным мелом он вписал между каждыми двумя соседними числами модуль их разности. Докажите, что красные числа можно разбить на две группы с одинаковыми суммами.

Решение. Докажем утверждение индукцией по количеству n чисел на доске (написанных белым мелом). При $n=2$ утверждение очевидно, т.к. два красных числа равны. Предположение индукции такое: для любых n чисел на доске соответствующие красные числа можно разбить на две группы с равными суммами. Пусть теперь на доске написано всего $(n+1)$ число и пусть x – наименьшее из них (или одно из самых маленьких, если их несколько), а c и d – соседние с x числа. Без ограничения общности считаем, что $c\le d$. Если мы сотрём (временно) число x, то по предположению индукции получившиеся n красных чисел можно разбить на две группы с равными суммами: $A=B$. В одной из этих групп (скажем, в первой группе с суммой A) находится число $(d-c)$. Тогда $A'+(d-c)=B$, где A' – сумма чисел первой группы без $(d-c)$. Теперь восстановим на своём месте стёртое число x. Вместо красного числа $(d-c)$ появятся два новых красных числа, а именно $(d-x)$ и $(c-x)$, но тогда $A'+(d-x)=B+(c-x)$, и у нас снова имеются две группы красных чисел с равными суммами. Шаг индукции проделан.