Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки» по математике 2023/2024 уч.г.

Финальный тур.

Время выполнения заданий 180 минут.

Каждая из пяти задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 20 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов.

8 класс

8.1. Из пункта A в пункт B велосипедист с постоянной скоростью ехал 3 часа. На обратном пути велосипедист увеличил скорость на 25%, а доехав до середины пути, увеличил скорость еще на 20%. Сколько времени занял обратный путь?

Ответ: 2 часа 12 минут.

Решение. Пусть длина пути из A в B равна a (км), а скорость движения из A в B равна v (км/ч). Тогда $\frac{a}{v}=3$. Пусть C – середина пути между A и B. Тогда время движения на обратном пути от B до C равно $\frac{a/2}{v\cdot 1{,}25}=\frac{2a}{5v}=\frac{6}{5}$ (час), а время движения от C до A равно $\frac{a/2}{v\cdot 1{,}25\cdot 1{,}2}=\frac{a}{3v}=1$ (час). Итак, время обратного пути $\frac{6}{5}+1=\frac{11}{5}$ (час).

8.2. Найдите все натуральные n, для которых число $n^3-6n^2+12n-7$ является простым.

Ответ: $n = 3$.

Решение. Представим выражение в виде $(n-2)^3+1=(n-1)(n^2-5n+7)$, здесь при $n > 3$ каждый сомножитель больше единицы. При $n = 1$ значение выражения равно 0, а при $n = 2$ оно равно 1 (но единица не относится к простым числам). При $n = 3$ значение равно простому числу 2.

8.3. **а)** Обязательно ли в произвольном выпуклом четырехугольнике есть две стороны, которые меньше (по длине) наибольшей диагонали? **б**) Существует ли выпуклый четырехугольник, у которого ровно две таких стороны?

Ответ: **а)** обязательно, **б)** существует.

Решение. **а**) Из четырех углов четырехугольника $ABCD$ хотя бы один неострый (т.к. в сумме углы составляют 360 градусов). Пусть это будет угол A. Тогда в треугольнике ABD имеем: $BD > AB$ и $BD > AD$. Таким образом, стороны AB и AD меньше диагонали BD, а значит, меньше наибольшей диагонали. **б**) Построим пример. Пусть ABC – равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны $AB = BC$ больше основания AC (это равносильно тому, что угол B меньше 60 градусов). Пусть M – середина AC. Продолжим медиану (она же высота) BM за точку M и возьмем на продолжении точку D такую, что $MD < AB - BM$ (это возможно, т.к. в треугольнике ABM гипотенуза AB больше катета BM). Тогда $ABCD$ – искомый четырехугольник: у него только стороны AD и CD меньше наибольшей диагонали BD.

8.4. На столе стоят n стаканов с водой, в них произвольное количество воды. За одно переливание можно выбрать любые два стакана и уравнять в них количество воды. Всегда ли удастся за несколько переливаний уравнять количество воды во всех стаканах **а)** при $n = 32$; **б**) при $n = 30$?

Ответ: **а**) всегда; **б**) не всегда.

Решение. а) Сгруппируем стаканы по парам и за 16 переливаний уравняем воду в каждой паре. Далее сформируем две группы стаканов, взяв по одному стакану из каждой пары. У нас получится две одинаковых (по количеству воды) группы стаканов по 16 стаканов в каждой. Точно так же в обеих группах мы можем проделать по 8 переливаний и после разделений на группы получить 4 одинаковых (по количеству воды) группы по 8 стаканов в каждой. Проделав такую же процедуру в каждой из 4 групп, получим 8 групп по 4 стакана, затем 16 групп по 2 стакана и, наконец, уравняем воду в каждом из двух стаканов во всех (одинаковых) 16 группах.

б) Если взять два стакана с m (грамм) и n (грамм) воды в них, то после одного переливания в обоих стаканах будет по $(m+n)/2$ грамм воды. Далее, если в двух стаканах количество воды имеет вид дробей (не обязательно несократимых) со знаменателем 2, то после переливания в обоих стаканах количество воды будет дробью со знаменателем 4, и т.д. Поэтому если изначально количество воды в стаканах выражалось натуральными числами (в граммах), то после нескольких переливаний количество воды в стаканах будет иметь вид $\frac{k}{2^N}$, где k и N – натуральные числа, вообще говоря, зависящие от номера стакана. Рассмотрим пример. Пусть вначале в 29 стаканах было по 100 грамм воды, а в 30-м стакане 150 грамм. Предположим, от противного, что после переливаний можно уравнять воду во всех стаканах. В каждом стакане тогда в результате должно стать по $\frac{3050}{30} = 101\frac{2}{3}$ (грамм). Таким образом, должно иметь место равенство $\frac{305}{3} = \frac{k}{2^N}$ при некоторых натуральных k и N. Отсюда $305 \cdot 2^N = 3k$. Но левая часть не делится на 3. Полученное противоречие показывает, что уравнять количество воды не удастся.

Комментарий. Можно обобщить результат задачи в виде такого утверждения: уравнять воду в n стаканах при любом начальном распределении удаётся только тогда, когда n – степень двойки

8.5. Вася написал на доске по кругу белым мелом несколько чисел (не меньше двух). Затем красным мелом он вписал между каждыми двумя соседними числами модуль их разности. Докажите, что красные числа можно разбить на две группы с одинаковыми суммами.

Решение. Докажем утверждение индукцией по количеству n чисел на доске (написанных белым мелом). При $n = 2$ утверждение очевидно, т.к. два красных числа равны. Предположение индукции такое: для любых n чисел на доске соответствующие красные числа можно разбить на две группы с равными суммами. Пусть теперь на доске написано всего $(n + 1)$ число и пусть x – наименьшее из них (или одно из самых маленьких, если их несколько), а c и d – соседние с x числа. Без ограничения общности считаем, что $c \le d$. Если мы сотрём (временно) число x, то по предположению индукции получившиеся n красных чисел можно разбить на две группы с равными суммами: $A = B$. В одной из этих групп (скажем, в первой группе с суммой A) находится число $(d - c)$. Тогда $A' + (d - c) = B$, где A' – сумма чисел первой группы без $(d - c)$. Теперь восстановим на своём месте стёртое число x. Вместо красного числа $(d - c)$ появятся два новых красных числа, а именно $(d - x)$ и $(c - x)$, но тогда $A' + (d - x) = B + (c - x)$, и у нас снова имеются две группы красных чисел с равными суммами. Шаг индукции проделан.