Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки» по математике 2023/2024 уч.г.

Финальный тур.

Время выполнения заданий 180 минут.

Каждая из пяти задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 20 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов.

9 класс

9.1. Найдите наименьшее возможное значение суммы $x + y + z$ трех положительных чисел x, y, z, удовлетворяющих соотношению $xy + yz + xz = 27$.

Ответ: 9.

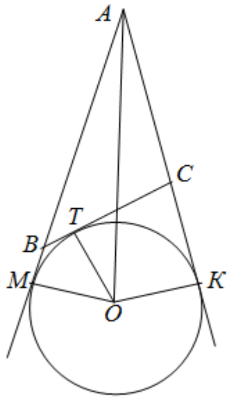
Решение. Имеем: $(x+y+z)^2 = \frac{1}{2}(2x^2+2y^2+2z^2)+2(xy+yz+xz) \geq xy+yz+xz+$ $+2(xy+yz+xz) = 3\cdot 27 = 81$. Учитывая положительность $x + y + z$, получаем оценку $x + y + z \geq 9$. При $x = y = z = 3$ будем иметь (единственный) пример искомых чисел.

9.2. Сумма n последовательных натуральных чисел равна 2024. Может ли n быть четным?

Ответ: может.

Решение. Пусть сумма n последовательных натуральных чисел, начинающихся с числа m, равна 2024. Тогда по формуле суммы n членов арифметической прогрессии получим уравнение $\frac{n}{2}(2m + n - 1) = 2024$ (для тех, кто не знаком с этой формулой, покажем, как её получить. Для этого сгруппируем данные числа парами следующим образом: первое с последним, второе с предпоследним и т.д. Всего будет $\frac{n}{2}$ пар при четном n с одинаковыми суммами, а именно $(2m + n - 1)$ в каждой паре). Представим 2024 в виде $2024 = 2^3\cdot 11\cdot 23$, тогда $\frac{n}{2}(2m + n - 1) = 2^3\cdot 11\cdot 23$, т.е. $n\cdot(2m + n - 1) = 2^4\cdot 11\cdot 23$. Поскольку n четное число, то $(2m + n - 1)$ – число нечетное. Следовательно, чтобы последнее равенство выполнялось, n должно иметь вид $n = 2^4\cdot p$, где p – число нечетное. Тогда $p\cdot(2m + 16p - 1) = 11\cdot 23$. При $p = 1$ имеем $2m + 15 = 253$, отсюда $m = 119$. Таким образом, сумма 16 последовательных чисел $119 + 120 + \ldots + 134$ равна 2024. *Комментарий.* $n = 16$ *– единственное четное n, удовлетворяющее условиям задачи. Действительно, при* $p > 1$ *из уравнения* $p\cdot(2m + 16p - 1) = 11\cdot 23$ *следует, что p не меньше* 11, *и тогда левая часть больше правой.*

9.3. Дан треугольник ABC периметра P с углом A, равным α. Найдите радиус вневписанной окружности, касающейся BC и продолжений сторон AB и AC.



Ответ: $\frac{P}{2}\cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Решение. Пусть O – центр вневписанной окружности, T – точка касания окружности со стороной BC, M и K – точки касания окружности с продолжениями сторон AB и AC соответственно. По свойству отрезков касательных $BM = BT$, $CT = CK$, $AM = AK$. Так как $BC = BT + TC = BM + CK$, то $P = AB + AC + BC = AM + AK = 2AM$, откуда $AM = 0{,}5P$. Так как O – центр вневписанной окружности, то AO – биссектриса угла MAK. Поэтому $\angle MAO = 0{,}5\alpha$. Поскольку $OM \perp AM$ по свойству радиуса, проведенного в точку касания, в прямоугольном треугольнике MAO имеем $OM = AM \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} =$ $\frac{P}{2} \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$.

9.4. В правильном семиугольнике провели все диагонали. Сколько получилось точек пересечения диагоналей внутри семиугольника?

Ответ: 35.

Решение. Докажем сначала, что внутри семиугольника нет точек, в которых пересекаются три диагонали. Диагонали семиугольника могут быть двух типов – малые и большие: по одну сторону от малой диагонали одна вершина семиугольника, по другую – четыре. По одну сторону от большой диагонали две вершины, по другую – три. Пусть AC – малая диагональ, а B – та (единственная) вершина по одну сторону от AC. Поскольку AC пересекается только с диагоналями, выходящими из B, то на малой диагонали не может быть тройных пересечений. Значит, тройное пересечение могло бы появиться лишь при пересечении трех больших диагоналей. Но это также невозможно, т.к. три большие диагонали – это три равные хорды окружности, описанной около семиугольника (т.к. семиугольник – правильный), но, как нетрудно доказать, справедлив такой общий факт: любые две равные хорды окружности симметричны относительно прямой, проходящей через центр окружности и точку пересечения этих хорд (или их продолжений, когда хорды не пересекаются). Для доказательства этого факта следует заметить, что центр окружности равноудалён от равных хорд и поэтому находится на биссектрисе угла, образованного пересечением хорд (или их продолжений). Итак, тройных пересечений нет, и мы используем это. Заметим, что любые 4 вершины семиугольника однозначно определяют выпуклый четырехугольник с этими вершинами, а значит, и точку пересечения его диагоналей. Таким образом, число искомых точек пересечения – это число способов выбрать четыре вершины из семи, т.е. число сочетаний $C_7^4 = 35$. *Комментарий. К тому же числу можно прийти другим путем (без использования сочетаний). Малая диагональ, скажем AC, отделяет одну вершину, скажем B, от четырех вершин по другую сторону от AC. Поэтому AC пересекается со всеми* 4 *диагоналями, выходящими из B. Большая диагональ отделяет две и три вершины, поэтому на большой диагонали* $2 \cdot 3 = 6$ *точек пересечения. Всего в выпуклом семиугольнике* 7 *малых и* 7 *больших диагоналей. Считая точки пересечения по всем диагоналям, получим* $7 \cdot 4 + 7 \cdot 6 = 70$ *точек, но при этом каждая точка засчитана дважды (для обеих диагоналей, которым принадлежит). Таким образом, всего имеется* 35 *точек пересечения.*

9.5. Коля выписал на доске белым мелом все трехзначные натуральные числа, составленные из нечетных цифр. **а**) Сколько всего он выписал чисел? **б**) Около каждого выписанного числа Коля записал красным мелом произведение трех цифр данного числа. Чему равна сумма красных чисел?

Ответ: **а**) $5^3 = 125$; **б**) $25^3 = 15625$.

Решение. **а**) В трехзначном числе, составленном из нечетных цифр, на месте цифры сотен, цифры десятков и цифры единиц может оказаться любая из пяти нечетных цифр. Поэтому по правилу произведения, количество искомых чисел равно $5^3 = 125$. **б)** Рассмотрим произведение трёх скобок $(1 + 3 + 5 + 7 + 9)\cdot(1 + 3 + 5 + 7 + 9)\cdot(1 + 3 + 5 + 7 + 9)$. Если раскрыть эти скобки, то получится сумма 125 слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение трех цифр числа из пункта а**)**. Отметим, что каждому из 125 чисел пункта а) взаимно однозначно соответствует своё слагаемое в данной сумме: при этом соответствии слагаемое в первой скобке соответствует первой цифре числа (цифре сотен), слагаемое из второй скобки – цифре десятков, и слагаемое из третьей скобки – цифре единиц. В результате получаем искомую сумму $25^3 = 15625$.