Межрегиональная олимпиада школьников «Будущие исследователи – будущее науки» по математике»

Отборочный тур

10 класс

10.1. Существуют ли действительные числа *x*, *y*, для которых $x^2-5xy+7y^2+1=0$?

Ответ. Не существуют.

Решение. Преобразуем выражение $x^2-5xy+7y^2+1$, выделив полный квадрат: $x^2-5xy+7y^2+1=\left(x-\frac{5}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2+1$. Следовательно, выражение $x^2-5xy+7y^2+1$ при любых (действительных) *x*, *y* принимает положительные значения, а поэтому не существует *x*, *y*, для которых $x^2-5xy+7y^2+1=0$.

10.2. О функции $y=ax^2+bx+c$ известно, что на отрезке [–2; 2] её значения по модулю не превосходят 2. Найдите наибольшее возможное значение суммы коэффициентов *a*+*b*+*c*.

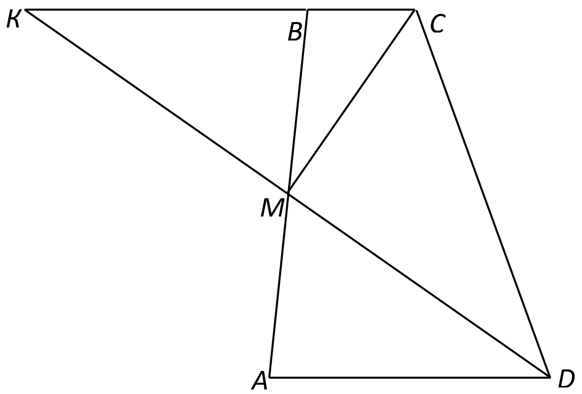
Ответ. 2.

Решение. Заметим, что *y*(1) = *a*+*b*+*c*. Оценка в данной задаче дана уже в условии, поэтому остаётся привести пример квадратного трёхчлена, принимающего значение 2 в точке *x* = 1, а на концах отрезка [–2; 2] – значения, большие или равные (–2). Можно привести (и проверить), например, такую функцию: $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$. Поясним, как прийти к подобному примеру. Очевидно, должно быть $a<0$, и мы имеем два условия на координаты вершины параболы: наибольшее значение, равное 2, должно быть в точке максимума $x=1$, т.е. имеем два соотношения *a*+*b*+*c*=2 и $-\frac{b}{2a}=1$. Учитывая симметрию параболы относительно её оси, можно потребовать ограничение значения функции только в левом конца отрезка [–2; 2], а именно: $y(-2)\geq -2 \Leftrightarrow 4a-2b+c\geq -2$. Из указанных выше соотношений получаем $b=-2a$, $c=a+2$ и подставляя эти величины в последнее неравенство, будем иметь оценку на число *a*: $-4\leq 9a<0$/ Итак, любое отрицательное число $a\geq -4/9$ и соответствующие числа $b=-2a$ и $c=a+2$ дают нужный пример коэффициентов.

10.3. Дана трапеция *ABCD*, у которой боковая сторона *CD* равна сумме оснований *AD*+*BC*. Биссектриса угла *D* пересекает боковую сторону *AB* в точке *M*. Найдите угол *CMD*.

Ответ. 90°.

Решение. Продлим *DM* до пересечения с прямой *BC*, точку пересечения прямых *DM* и *BC* обозначим через *K*. Так как ∠*ADM* = ∠*MDC* и ∠*ADK* = ∠*DKC* (в силу параллельности оснований), то ∠*KDC* = ∠*DKC*. Значит, треугольник *CKD* равнобедренный: *CK* = *CD*. Тогда *BK* = *CK* – *BC* = *CD* – *BC* = *AD* (по условию задачи). Учитывая параллельность *BK* || *AD*, получаем отсюда, что *AKBD* – параллелограмм, в котором точка *M* – точка пересечения диагоналей. Значит, *M* – середина *KD*. Поскольку треугольник *CKD* равнобедренный, его медиана *CM* является высотой и поэтому ∠*CMD* = 90°.



10.4. Докажите, что существует 2023 последовательных натуральных числа, среди которых ровно 23 простых.

<u>Решение.</u> Аналогичное решение задачи: Рассмотрим первые 100 натуральных чисел: 1, 2, …, 100. Среди них больше трёх простых (даже в первой десятке четыре простых числа). С другой стороны, можно указать 100 последовательных натуральных чисел, среди которых простых чисел нет. Действительно, рассмотрим сто последовательных чисел: $101! + 2$, $101! + 3$, …, $101! + 101$ (напомним: $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$). Все эти числа – составные (первое из них делится на 2, второе – на 3, сотое – на 101). Обозначим через $S(n)$ количество простых среди последовательных чисел n, $n + 1$,…, $n + 99$. Имеем: $S(1) > 3$ и $S(101!+2) = 0$. Далее, заметим, что если сдвинуться на единицу от сотни последовательных чисел n, $n + 1$,…, $n + 99$ и перейти к $n + 1$, $n + 2$,…, $n + 100$, то при этом могут быть три случая: 1) $S(n+1) = S(n)$ (в случае, когда числа n и $(n+100)$ либо оба простые, либо оба составные); 2) $S(n+1) = S(n) - 1$ (в случае, когда n простое, а $(n+100)$ составное); и 3) $S(n+1) = S(n) + 1$ (в случае, когда n составное, а $(n+100)$ простое). Во всех случаях значение $S(n)$ при увеличении n на единицу не может «прыгнуть» больше, чем на единицу. Значит, «пропустить» значение $S(n) = 3$ невозможно (оно обязательно достигается при некотором $n < 101! + 2$).

В качестве $S(n)$ в данной задаче 10.4. рассмотрим количество простых среди последовательных чисел n , $n+1$, …, $n+2022$. Единственно, что здесь надо проверить – это то, что $S(1) > 23$. Но в этом легко убедиться, т.к. даже среди первой сотни число простых равно 25 *(Комментарий: среди первых 2023 натуральных чисел число простых, оказывается, равно 306).*

Межрегиональная олимпиада школьников «Будущие исследователи – будущее науки» по математике»
Отборочный тур 2022/23

Вариант 2.

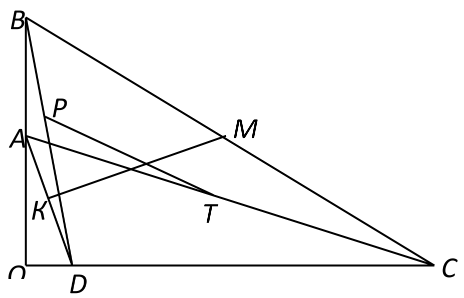
10 класс

10.1. Докажите неравенство $|2a-1| \le a^2 - a + 2$.

Решение. При $a > 1/2$ имеем $2a-1 \le a^2 - a + 2 \Leftrightarrow a^2 - 3a + 3 \ge 0$. Это неравенство верно, поскольку старший коэффициент положительный, а дискриминант меньше нуля. При $a \le 1/2$ имеем $1-2a \le a^2 - a + 2 \Leftrightarrow a^2 + a + 1 \ge 0$, и это неравенство справедливо на том же основании.

10.2. Дан четырехугольник $ABCD$. Известно, что продолжения сторон AB и CD пересекаются под прямым углом. Докажите, что отрезок между серединами сторон AD и BC равен отрезку между серединами диагоналей.

Решение.



Пусть *K* – середина *AD*, *M* – середина *BC*, *T* – середина *AC*, *P* – середина *BD*. Требуется доказать, что $KM = PT$. В треугольнике *ABD* отрезок *KP* – средняя линия, следовательно, $KP \parallel AB$ и $KP = AB/2$. Аналогично, $MT \parallel AB$, $MT = AB/2$ как средняя линия треугольника *ABC*. Значит, $KP \parallel MT$, $KP = MT$ и, следовательно, *KPMT* – параллелограмм. Кроме того, $KT \parallel CD$ как средняя линия треугольника *ACD*. Поскольку $KP \parallel AB$, $KT \parallel CD$ и по условию задачи $AB \perp CD$, то $KP \perp KT$. Таким образом, *KPMT* – прямоугольник и $PT = KM$ как диагонали прямоугольника. *Комментарий. Приведено «чисто геометрическое» доказательство, но с использованием координатного метода (с началом координат в точке O) или векторов получается даже более простое решение..*

10.3. Сколько решений имеет уравнение $x! = y^2 - 24$ в натуральных числах *x*, *y*? (Напомним, что $n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$).

Ответ. 2 решения.

Решение. Непосредственно проверяется, что два числа $x = 1$ (для $y = 5$) и $x = 5$ (для $y = 12$) удовлетворяют уравнению, а числа *x*, равные 2, 3, 4, не подходят. При $x \ge 6$ число $(x!+24)$ делится на 3, но не делится на 9, т.к. $x!$ делится на 9, а 24 на 9 не делится. Значит, это число не может быть точным квадратом при $x \ge 6$.

10.4. Существуют ли такие пять натуральных чисел (не обязательно различных), что сумма любых трёх из них – простое число, если среди этих пяти чисел **а)** по меньшей мере три различных; **б)** по меньшей мере четыре различных?

Ответ. **а)** существуют **б)** не существуют.

Решение. . **а)** Пример искомых пяти чисел можно привести такой: 1; 1; 1; 5; 17. **б)** Рассмотрим остатки от деления данных пяти чисел на 3. Если среди остатков встречаются все три {0;1;2}, то сумма трех чисел с различными остатками даст число, делящееся на 3 и отличное от 3, т.е. сумма этих трех чисел – число составное. Если же встречаются только 2 остатка, то среди пяти чисел должно встретиться три с одинаковым остатком, и тогда сумма этих трех чисел делится на 3 и отлично от 3.