Межрегиональная олимпиада школьников «Будущие исследователи – будущее науки» по математике»

Отборочный тур

11 класс

11.1. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{a-x}=a$ имеет два корня.

<u>Ответ.</u> $1\le a<2$.

<u>Решение.</u> Очевидно, $a>0$ ($a\ne 0$, т.к. при a= 0 область определения сводится к точке x = 0). Результат получается при исследовании с помощью производной функции $y=\sqrt{x}+\sqrt{a-x}$. Область определения этой функции [0*;* a], и $y'=1/(2\sqrt{x})-1/(2\sqrt{a-x})$. Производная положительна на (0*;* a/2), отрицательна на (a/2*;* a) и обращается в 0 при x = a/2. Поэтому на отрезке [0; a/2] функция возрастает от $\sqrt{a}$ до $\sqrt{2a}$, на отрезке [a/2*;* a] она убывает от $\sqrt{2a}$ до $\sqrt{a}$ и при $x=a/2$ имеет максимум, равный $\sqrt{2a}$. Отсюда следует, что наличие двух корней равносильно двойному неравенству $\sqrt{a}\le a<\sqrt{2a}$. Учитывая положительность параметра a, возводим последнее неравенство в квадрат, делим на a и получаем ответ.

11.2. О функции $y=ax^2+bx+c$ известно, что на отрезке [–2; 2] её значения по модулю не превосходят 2. Найдите наибольшее возможное значение суммы коэффициентов a+b+c.

<u>Ответ.</u> 2.

<u>Решение.</u> Заметим, что $y(1)=a+b+c$. Оценка в данной задаче дана уже в условии, поэтому остаётся привести пример квадратного трёхчлена, принимающего значение 2 в точке x = 1, а на концах отрезка [–2; 2] – значения, большие или равные (–2). Можно привести (и проверить), например, такую функцию: $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$. Поясним, как прийти к подобному примеру. Очевидно, должно быть $a<0$, и мы имеем два условия на координаты вершины параболы: наибольшее значение, равное 2, должно быть в точке максимума x = 1, т.е. имеем два соотношения $a+b+c=2$ и $-\frac{b}{2a}=1$. Учитывая симметрию параболы относительно её оси, можно потребовать ограничение значения функции только в левом конца отрезка [–2; 2], а именно: $y(-2)\ge -2 \Leftrightarrow 4a-2b+c\ge -2$. Из указанных выше соотношений получаем $b=-2a$, $c=a+2$ и подставляя эти величины в последнее неравенство, будем иметь оценку на число a: $-4\le 9a<0$ / Итак, любое отрицательное число $a\ge -4/9$ и соответствующие числа $b=-2a$ и $c=a+2$ дают нужный пример коэффициентов.

11.3. Докажите, что для любого натурального n система уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x}\cos\left(\pi\dfrac{y}{2x}\right)+\sqrt{y}\cos\left(\pi\dfrac{x}{2y}\right)=0\\ x+y=6n\end{cases}$$

имеет не менее трех решений в натуральных числах x, y.

<u>Решение</u>. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что системе удовлетворяют следующие решения: (4n; 2n), (2n; 4n) и (3n; 3n).

11.4. Докажите, что существует 2023 последовательных натуральных числа, среди которых ровно 23 простых.

<u>Решение.</u> Рассмотрим первые 100 натуральных чисел: 1, 2, …, 100. Среди них больше трёх простых (даже в первой десятке четыре простых числа). С другой стороны, можно указать 100 последовательных натуральных чисел, среди которых простых чисел нет. Действительно, рассмотрим сто последовательных чисел: 101! + 2, 101! + 3, …, 101! +101 (напомним: $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$). Все эти числа – составные (первое из них делится на 2, второе –

на 3, сотое – на 101). Обозначим через $S(n)$ количество простых среди последовательных чисел n, $n + 1$,…, $n + 99$. Имеем: $S(1) > 3$ и $S(101!+2) = 0$. Далее, заметим, что если сдвинуться на единицу от сотни последовательных чисел n, $n + 1$,…, $n + 99$ и перейти к $n + 1$, $n + 2$,…, $n + 100$, то при этом могут быть три случая: 1) $S(n+1) = S(n)$ (в случае, когда числа n и $(n+100)$ либо оба простые, либо оба составные); 2) $S(n+1) = S(n) – 1$ (в случае, когда n простое, а $(n+100)$ составное); и 3) $S(n+1) = S(n) + 1$ (в случае, когда n составное, а $(n+100)$ простое). Во всех случаях значение $S(n)$ при увеличении n на единицу не может «прыгнуть» больше, чем на единицу. Значит, «пропустить» значение $S(n) = 3$ невозможно (оно обязательно достигается при некотором $n <101! + 2$).

В качестве $S(n)$ в данной задаче рассмотрим количество простых среди последовательных чисел n , $n+1$, …, $n+2022$. Единственно, что здесь надо проверить – это то, что $S(1) > 23$. Но в этом легко убедиться, т.к. даже среди первой сотни число простых равно 25 *(Комментарий: среди первых 2023 натуральных чисел число простых, оказывается, равно 306).*

Вариант 2.

11 класс

11.1. Решите уравнение $3\sin x + 4\cos x = 2\operatorname{tg} x + 4\operatorname{ctg} x$.

Ответ. Корней нет.

Решение. Оценим модуль левой и правой части. Введя вспомогательный угол $\alpha = \arcsin(4/5)$ для выражения в левой части, получим $|3\sin x + 4\cos x| = \left|\sqrt{3^2+4^2}\sin(x+\alpha)\right| \le 5$. В правой части воспользуемся неравенством о средних: $a+b \ge 2\sqrt{ab}$ (где $a \ge 0, b \ge 0$). Мы используем это неравенство для $a = 2|\operatorname{tg} x|$, $b = 4|\operatorname{ctg} x|$. Учитывая то, что $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ всегда одного знака (на ОДЗ), получим: $|2\operatorname{tg} x + 4\operatorname{ctg} x| = |2\operatorname{tg} x| + |4\operatorname{ctg} x| \ge 2\sqrt{8|\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x|} = 2\sqrt{8}$. Поскольку $5 < 2\sqrt{8}$, модуль левой части исходного уравнения всегда меньше модуля правой.

11.2. а) Чему могут равняться длины сторон тупоугольного треугольника, если известно, что они являются последовательными натуральными числами? **б)** Сколько существует тупоугольных треугольников, у которых длины сторон – натуральные числа, образующие арифметическую прогрессию с разностью $d = 100$? (Равные треугольники засчитываются один раз).

Ответ. а) 2; 3; 4. **б)** 199.

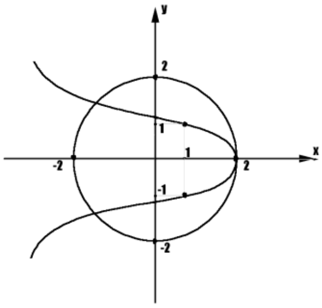
Решение. а) Пусть длины сторон равны n, $n+1$, $n+2$. При $n = 1$ не выполняется неравенство треугольника. При $n = 3$ получается прямоугольный (пифагоров) треугольник ($5^2 = 3^2 + 4^2$), а при $n > 3$ – остроугольный треугольник, т.к. $(n+2)^2 < n^2 + (n+1)^2 \Leftrightarrow (n-1)^2 > 4 \Leftrightarrow n > 3$. При $n = 2$ выполняется и неравенство треугольника, и неравенство для тупого угла: $4^2 > 2^2 + 3^2$. **б)** Пусть длины сторон равны n, $n+100$, $n+200$. Повторяя рассуждения пункта **а),** получаем, что n должно удовлетворять системе неравенств $\begin{cases} n+200 < n+n+100, \\ (n+200)^2 > n^2 + (n+100)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n > 100, \\ (n-100)^2 < 200^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n > 100, \\ -100 < n < 300 \end{cases}$ $\Leftrightarrow 100 < n < 300$. Последнему неравенству удовлетворяют 199 натуральных чисел.

11.3. Сколько решений имеет уравнение $x! = y^2 - 24$ в натуральных числах x, y? (Напомним, что $n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$).

Ответ. 2 решения.

Решение. Непосредственно проверяется, что два числа $x = 1$ (для $y = 5$) и $x = 5$ (для $y = 12$) удовлетворяют уравнению, а числа x, равные 2, 3, 4, не подходят. При $x \ge 6$ число $(x! + 24)$

делится на 3, но не делится на 9, т.к. x! делится на 9, а 24 на 9 не делится. Значит, это число не может быть точным квадратом при $x \geq 6$..



11.4. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a, \\ x + \log_2(y^2 + 1) = a \end{cases}$ имеет единственное решение?

__**Ответ:**__ $a = 0$. __**Решение.**__ Заметим, что если (x, y) – решение системы, то и $(x, -y)$ тоже является решением. Поэтому если для параметра a система имеет единственное решение, то значение y должно быть равно нулю. Тогда из второго уравнения имеем $x = a$, и подставляя в первое уравнение $x=a$, $y = 0$, получим $a^2 = 2a$. Значит, либо $a = 0$, либо $a = 2$. Теперь необходимо проверить эти значения a (отметим, что они получены как *следствие* единственности решения, но на самом деле ещё не гарантируют единственность). При $a = 0$ первое уравнение эквивалентно равенствам $x = y = 0$, и для этих нулевых значений неизвестных второе уравнение удовлетворяется, т.е. значение $a = 0$ подходит. При $a = 2$ одно из решений системы легко угадывается: это $x = 2$, $y = 0$. Однако это не единственное решение. Действительно, кривая $x = 2 - \log_2(y^2 + 1)$ пересекает окружность $x^2 + y^2 = 4$ не только в точке (2; 0) (касаясь), но ещё в двух симметричных точках во втором и третьем квадрантах (см. рис.). Покажем это строго, а не только на графике. Для этого рассмотрим точки (1;1) и (1;–1); они лежат на данной кривой и расположены внутри круга $x^2 + y^2 \leq 4$ (можно было рассмотреть и другие внутренние точки, например, $(0;\ \pm\sqrt{3})$ на оси Oy). Но точки кривой, у которых $|y| > 2$, расположены вне круга. Значит, в силу непрерывности кривых, есть еще две общие точки на окружности и, значит, еще два решения системы при $a = 2$.