Межрегиональная олимпиада школьников «Будущие исследователи – будущее науки» по математике»
Отборочный тур

Вариант 1.

7 класс

7.1. Куб Q со стороной 20 см был собран из кубиков со стороной 4 см. Затем из куба вынули четыре верхних угловых кубика и получили объёмную фигуру T. На сколько процентов при переходе от Q к T изменился **а)** объем? **б)** площадь полной поверхности?

<u>Ответ.</u> **а)** уменьшился на 3,2%; **б)** 0% (площадь не изменилась). **<u>Решение.</u>** **а)** Пусть V – объем одного кубика (легко подчитать, что $V = 64cm^3$, но это даже не потребуется далее). Тогда объем всего куба равен $125V$, т.к. большой куб составлен из 125 кубиков. Четыре вынутые угловые кубика имеют суммарный объем $4V$, что составляет 100·(4 /125)% = 3,2% от объема куба. **б)** Рассмотрим одну из верхних угловых вершин куба, скажем, вершину A, она является также вершиной удаляемого кубика, скажем, кубика P. Тогда A – общая вершина ровно трёх граней P (трёх квадратиков со стороной 4 см.) Если кубик P вынуть, то вместо этих трёх граней на поверхности фигуры T образуются три равные грани – квадратики со стороной 4 см: это три грани P с общей вершиной, противоположной вершине A.

7.2. Петя задумал 32-значное натуральное число N и сообщил Коле первые 30 цифр: с первой по десятую – единицы, с 11-й по 20-ю – двойки, с 21-й по 30-ю – тройки. Ещё Петя сказал, что N делится на 72. Зная это, сможет ли Коля найти последние две цифры числа N ?

<u>Ответ</u>. Однозначно две последние цифры не определяются, есть два варианта: либо 1) 1 и 2; либо 2) 8 и 4. **<u>Решение.</u>** N должно делиться на 9 и на 8. Обозначим последние цифры x и y. Сумма первых 30 цифр числа N равна 60, поэтому по признаку делимости на 9, сумма $x + y$ может равняться либо 3, либо 12. Кроме того, по признаку делимости на 4, число $\overline{xy}$ из последних двух цифр делится на 4. Поэтому $\overline{xy}$ могло быть равно либо 12, либо 48, либо 84. Но поскольку N делится на 8, то трехзначное число $\overline{3xy}$ (составленное из последних трех цифр числа N) делится на 8. Среди чисел 312, 348 и 384 этим свойством обладают 312 и 384. *Комментарий. Если ученик подобными рассуждениями пришел к указанным двум возможным значениям, то независимо от формы его ответа («Коля сможет» или «не сможет») он получает полный балл.*

7.3. В классе 33 ученика разыграли лотерею. В билетиках были записаны все натуральные числа от 1 до 33. Могло ли после лотереи получиться так, что **а)** сумма чисел на билетиках у мальчиков та же, что у девочек? **б)** сумма чисел у мальчиков вдвое меньше, чем у девочек?

<u>Ответ</u>. **а)** Не могло. **б)** Могло. **<u>Решение.</u>** **а**) Сумма S всех чисел на билетиках нечетна (можно подсчитать ее: S = 33·(1+33) / 2 = 561, но легко, и не считая, увидеть, что в этой сумме 17 нечетных и 16 четных слагаемых). Поэтому разбить S на две равные (целые) части не удастся**. б)** Если разделить число S=561 на 3, то получится 187. Из шести самых больших чисел можно «набрать» 183, т.к. 33+32+31+30+29+28 = 183, и добавив 4, получим нужную сумму 187. С такими числами в билетиках у семи мальчиков получится нужный пример.

7.4. На клетчатой доске размера $m \times n$ в каждой клетке стоит по шашке. За один ход разрешается выбрать любые две шашки и каждую из них подвинуть на соседнюю по стороне клетку. Если на какой-то клетке оказалось хотя бы две шашки, то с этой клетки две шашки можно снять. Докажите, что если произведение mn делится на 4, то при помощи нескольких таких операций можно снять с доски все шашки.

Решение. Если m и n – числа четные, то доска разбивается на квадраты 2×2, и с каждого такого квадрата шашки можно снять после одной операции (две диагональные шашки передвинем на другую диагональ, получив на ней двойные шашки). Если же одно из чисел делится на 4, то доска разбивается на прямоугольники размера 1×4, и с каждого такого прямоугольника шашки снимаются после одной операции (крайние шашки сдвигаем к середине).

Межрегиональная олимпиада школьников «Будущие исследователи – будущее науки» по математике»
Отборочный тур 2022/23

Вариант 2.

7 класс

7.1. В футбольной команде 11 человек, рост каждого футболиста меньше 2 метров, а средний рост игроков команды равен 190 см. Могло ли получиться так, что после удаления с поля одного из игроков средний рост оставшихся десяти человек стал меньше 188 см?

Ответ. Не могло. **Решение.** Пусть рост удаленного с поля игрока равен x (см). До его удаления сумма всех значений роста 11 футболистов была равна $190 \cdot 11 = 2090$ (см). После удаления сумма стала равна $2090 - x$, и если предположить, что средний рост стал меньше 188 см, то тогда $2090 - x < 188 \cdot 10 = 1880$. Значит, $x > 2090 - 1880 = 210$ (см). Но это противоречит тому условию задачи, что у всех футболистов рост меньше 2 метров. Поэтому такое предположение неверно.

7.2. Два луча OA и OB составляют развёрнутый угол. Из точки O проведены ещё два луча OC и OD по одну сторону от прямой AB. Между соседними лучами образовались три угла, из которых средний угол (т.е. угол COD) отличается от каждого из крайних на 30 градусов. Найдите эти три угла (приведите все возможные варианты).

Ответ. Возможны три варианта:1) 70°, 40°, 70°; 2) 50°, 80°, 50°; 3**)** 30°, 60°, 90°. **Решение.** Пусть x – величина (в градусах) среднего угла. Тогда возможны следующие варианты для крайних углов: 1) $x+30$ и $x+30$; 2) $x-30$ и $x-30$; 3) $x-30$ и $x+30$ (с точностью до порядка). Поскольку развернутый угол равен 180°, получится для этих случаев три уравнения:

1) $x+30 + x + x+30 = 180$, и тогда $3x = 120$, значит $x = 40$. В этом случае углы равны 70°, 40°, 70°.
2) $x-30 + x + x-30 = 180$, и тогда $3x = 240$, значит $x = 80$. В этом случае углы равны 50°, 80°, 50°.
3) $x-30 + x + x+30 = 180$, и тогда $3x = 180$, значит $x = 60$. В этом случае углы равны 30°, 60°, 90°.

Комментарий. Ученик может указать также четвертый вариант, когда крайние углы меняются местами: 90°, 60°, 30°, и это тоже считается верным ответом.

7.3. Сколько существует пятизначных натуральных чисел, которые делятся на 4 и не содержат в своей десятичной записи цифру 0 ?

Ответ. $18 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 13\,122$**.** **Решение.** По признаку делимости на 4, число, составленное из последних двух цифр, должно делиться на 4. Среди всех 25 таких последних двух цифр, а именно 00, 04, 08, 12,…, 96, нужно (из-за условия отсутствия нулевых цифр) удалить три числа из первой десятки, а также 20, 40, 60, 80 – итого 7 чисел. Остальные 18 чисел подойдут как кандидаты для последних двух цифр. А каждую из старших трех цифр можно выбрать 9 способами – это может быть любая цифра, кроме нуля. В результате по правилу произведения получаем ответ: $18 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 13\,122$**.**

7.4. Из клетчатого квадрата 10×10 Вова хочет вырезать как можно больше клетчатых прямоугольников вида 1×4 или 4×1. Сколько таких прямоугольников он сможет вырезать?

Ответ. 24. **Решение.** Если вырезать квадрат 2×2 из правого нижнего угла большого квадрата (см. рис.), то оставшаяся часть разбивается на квадрат 8×8 и два прямоугольника 2×8 и 8×2. Очевидно, каждую из этих частей можно разрезать на прямоугольники 1×4 или 4×1 (т.к. 8 делится на 4). В итоге получим 24 таких прямоугольника. Докажем теперь оценку: при любых разрезаниях не может получиться 25 нужных прямоугольников. Для этого рассмотрим шахматную раскраску квадрата 10×10 с помощью «двойных» клеток 2×2 (см. рис.) При такой раскраске во всём квадрате 10×10 неодинаковое количество черных и белых клеток (всего 48 белых и 52 белых клетки 1×1), а любой прямоугольник 1×4 или 4×1 содержит по две черных и белых клетки 1×1. Поэтому «распределить» все 100 клеток квадрата 10×10 по таким прямоугольникам нельзя.