Межрегиональная олимпиада школьников «Будущие исследователи – будущее науки» по математике»

Отборочный тур

8 класс

8.1. Куб Q со стороной 20 см был собран из кубиков со стороной 4 см. Затем из куба вынули четыре верхних угловых кубика и получили объёмную фигуру T. На сколько процентов при переходе от Q к T изменился **а)** объем? **б)** площадь полной поверхности?

<u>Ответ.</u> а) уменьшился на 3,2%; **б)** 0% (площадь не изменилась).

<u>Решение.</u> а) Пусть V – объем одного кубика (легко подчитать, что V $= 64cm^3$, но это даже не потребуется далее). Тогда объем всего куба равен 125V, т.к. большой куб составлен из 125 кубиков. Четыре вынутые угловые кубика имеют суммарный объем 4V, что составляет 100·(4 /125)% = 3,2% от объема куба.

б) Рассмотрим одну из верхних угловых вершин куба, скажем, вершину А, она является также вершиной удаляемого кубика, скажем, кубика Р. Тогда А – общая вершина ровно трёх граней Р (трёх квадратиков со стороной 4 см.) Если кубик Р вынуть, то вместо этих трёх граней на поверхности фигуры Т образуются три равные грани – квадратики со стороной 4 см: это три грани Р с общей вершиной, противоположной вершине А.

8.2. В классе 33 ученика разыграли лотерею. В билетиках были записаны все натуральные числа от 1 до 33. Могло ли после лотереи получиться так, что **а)** сумма чисел на билетиках у мальчиков та же, что у девочек? **б)** сумма чисел у мальчиков вдвое меньше, чем у девочек?

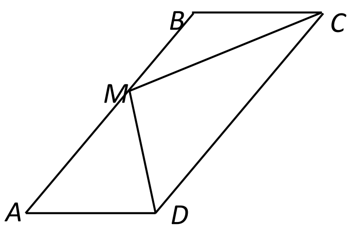
<u>Ответ</u>. а) Не могло. **б)** Могло.

<u>Решение.</u> а) Сумма S всех чисел на билетиках нечетна (можно подсчитать ее: S = 33·(1+33) / 2 = 561, но легко, и не считая, увидеть, что в этой сумме 17 нечетных и 16 четных слагаемых). Поэтому разбить S на две равные (целые) части не удастся.

б) Если разделить число S=561 на 3, то получится 187. Из шести самых больших чисел можно «набрать» 183, т.к. 33+32+31+30+29+28 = 183, и добавив 4, получим нужную сумму 187. С такими числами в билетиках у семи мальчиков получится нужный пример.

8.3. Дан параллелограмм $ABCD$, у которого $AB = 10$, $BC = 5$. Биссектриса угла D пересекает боковую сторону AB в точке M. Найдите угол CMD.

<u>Ответ</u>. 90°. **<u>Решение.</u>** Так как $\angle ADM = \angle MDC$ и $\angle AMD = \angle MDC$ (в силу параллельности сторон AB и CD), то $\angle AMD = \angle MDA$. Значит, треугольник AMD – равнобедренный: $AM = AD = 5$. Тогда $BM = AB - AM = 10 - 5 = 5$. Следовательно, треугольник BMC – тоже равнобедренный: $\angle BMC = \angle BCM$. Поскольку $\angle BMC = \angle MCD$, то $\angle BCM = \angle MCD$, и поэтому CM – биссектриса угла C в параллелограмме $ABCD$. Тогда в треугольнике DMC сумма углов при основании DC равна половине суммы углов D и C параллелограмма $ABCD$, т.е. равна 180°:2 = 90°. Таким образом, $\angle CMD = 180° - 90° = 90°$.



8.4. На клетчатой доске размера $m \times n$ в каждой клетке стоит по шашке. За один ход разрешается выбрать любые две шашки и каждую из них подвинуть на соседнюю по стороне клетку. Если на какой-то клетке оказалось хотя бы две шашки, то с этой клетки две шашки можно снять. Докажите, что **а)** если произведение mn делится на 4, то при помощи нескольких таких операций можно снять с доски все шашки. **б)** если mn не делится на 4, то все шашки снять с доски не удастся.

Ответ. **а)** можно, **б)** нельзя.

Решение. **а)** Если m и n – числа четные, то доска разбивается на квадраты 2×2, и с каждого такого квадрата шашки можно снять после одной операции (две диагональные шашки передвинем на другую диагональ, получив на ней двойные шашки). Если же одно из чисел делится на 4, то доска разбивается на прямоугольники размера 1×4, и с каждого такого прямоугольника шашки снимаются после одной операции (крайние шашки сдвигаем к середине).

б) Если оба числа m и n нечетны, то все шашки снять нельзя, т.к. вначале было нечетное число шашек, и каждый раз снимается по две шашки. Пусть теперь mn - четное число, не делящееся на 4. Рассмотрим шахматную раскраску нашей доски. Заметим, что изначально на черных клетках стояло $mn/2$ шашек (нечетное число). Покажем, что после каждого хода количество шашек, стоящих на черных клетках, будет нечетным. Действительно, при выполнении очередного хода могут быть три ситуации, когда подвигают две шашки либо из двух белых клеток, либо из двух черных, либо из белой и черной. В первом случае число шашек на черных клетках увеличится на два, во втором – уменьшится на два, в третьем – не изменится. Таким образом, четность не изменится. И при снятии пары шашек, очевидно, четность сохранится. Поэтому хотя бы одна шашка останется на черной клетке.

Межрегиональная олимпиада школьников «Будущие исследователи – будущее науки» по математике»
Отборочный тур 2022/23

Вариант 2.

8 класс

8.1. В футбольной команде 11 человек, рост каждого футболиста меньше 2 метров, а средний рост игроков команды равен 190 см. Могло ли получиться так, что после удаления с поля одного из игроков средний рост оставшихся десяти человек стал меньше 188 см?

<u>Ответ.</u> Не могло.

<u>Решение.</u> Пусть рост удаленного с поля игрока равен x (см). До его удаления сумма всех значений роста 11 футболистов была равна $190\cdot 11=2090$ (см). После удаления сумма стала равна $2090-x$, и если предположить, что средний рост стал меньше 188 см, то тогда $2090-x<188\cdot 10=1880$. Значит, $x>2090-1880=210$ (см). Но это противоречит тому условию задачи, что у всех футболистов рост меньше 2 метров. Поэтому такое предположение неверно.

8.2. Два луча OA и OB составляют развёрнутый угол. Из точки O проведены ещё два луча OC и OD по одну сторону от прямой AB. Между соседними лучами образовались три угла, из которых средний угол (т.е. угол COD) отличается от каждого из крайних на 30 градусов. Найдите эти три угла (приведите все возможные варианты).

<u>Ответ.</u> Возможны три варианта:1) 70°, 40°, 70°; 2) 50°, 80°, 50°; 3**)** 30°, 60°, 90°.

<u>Решение.</u> Пусть x – величина (в градусах) среднего угла. Тогда возможны следующие варианты для крайних углов: 1) $x+30$ и $x+30$; 2) $x-30$ и $x-30$; 3) $x-30$ и $x+30$ (с точностью до порядка). Поскольку развернутый угол равен 180°, получится для этих случаев три уравнения:

1) $x+30+x+x+30=180$, и тогда $3x=120$, значит $x=40$. В этом случае углы равны 70°, 40°, 70°.
2) $x-30+x+x-30=180$, и тогда $3x=240$, значит $x=80$. В этом случае углы равны 50°, 80°, 50°.
3) $x-30+x+x+30=180$, и тогда $3x=180$, значит $x=60$. В этом случае углы равны 30°, 60°, 90°.

Комментарий. Ученик может указать также четвертый вариант, когда крайние углы меняются местами: 90°, 60°, 30°, и это тоже считается верным ответом.

8.3. а) Прямоугольник $ABCD$ размера $2023\text{см}\times 10$ см сначала разбили на клетки (квадратики) со стороной 1см, а затем провели диагональ AC. На сколько всего частей разбился прямоугольник? **б)** Аналогичная задача для прямоугольника размера $2023\text{см}\times 7$ см.

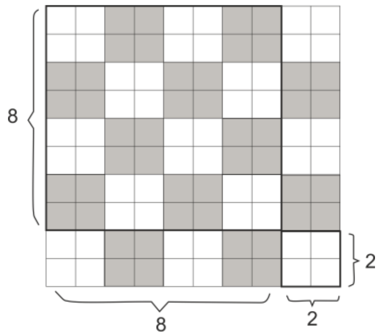
<u>Ответ.</u> а) 22 262; **б)** 16 184.

<u>Решение.</u> а) Рассмотрим данный прямоугольник на координатной плоскости, у которой точка A – начало координат, ось x идет вдоль AD, а ось y – вдоль AB. Вершины прямоугольника имеют следующие координаты: $A(0;\ 0)$, $B(0;\ 2023)$, $C(10;\ 2023)$, $D(10;0)$. До проведения диагонали AC прямоугольник был разбит целочисленной решёткой (сеткой) прямых $x=1, x=2, \ldots, x=9$ и $y=1, y=2, \ldots, y=2022$ на $2023\times 10=20230$ единичных квадратиков (клеток). Уравнение диагонали AC имеет вид $y=(2023/10)\cdot x$. Она не пересекает узлы решётки внутри прямоугольника: это следует из взаимной простоты чисел 2023 и 10 (в противном случае при некотором целом x от 1 до 9 число $2023 \cdot x$ делилось бы на 10.) Значит, AC пересекает все 2022 + 9 = 2031 линии сетки в разных точках и этими точками AC разбивается на 2031+1 = 2032 интервалов. Каждый такой интервал добавляет еще одну часть в предыдущее разбиение на клетки. В результате получается 20230 + 2032 = 22 262 части. **б)** 2023 раскладывается на простые множители как $2023 = 7 \cdot 17 \cdot 17$. Поэтому наклон прямой $y = (2023/7) \cdot x$ равен целому числу 289, и на диагонали AC будет лежать 6 узлов решетки, соответствующих абсциссам $x = 1$, $x = 2$, …, $x = 6$. Таким образом, количество точек пересечения AC с сеткой прямых будет на 6 меньше (по сравнению с тем, как было в случае взаимно простых сторон пункта **а),** где получалось бы 2022 + 6). Другими словами, данные вертикальные прямые сетки не дают новых пересечений с AC и таким образом, на AC лежит 2022 точки пересечения (только с горизонтальными прямыми сетки), а всего частей разбиения будет 2023·7 + 2022 + 1 = 16 184.

8.4. Из клетчатого квадрата 10×10 Вова хочет вырезать как можно больше клетчатых прямоугольников вида 1×4 или 4×1. Сколько таких прямоугольников он сможет вырезать?

Ответ. 24.

Решение.



Если вырезать квадрат 2×2 из правого нижнего угла большого квадрата (см. рис.), то оставшаяся часть разбивается на квадрат 8×8 и два прямоугольника 2×8 и 8×2. Очевидно, каждую из этих частей можно разрезать на прямоугольники 1×4 или 4×1 (т.к. 8 делится на 4). В итоге получим 24 таких прямоугольника. Докажем теперь оценку: при любых разрезаниях не может получиться 25 нужных прямоугольников. Для этого рассмотрим шахматную раскраску квадрата 10×10 с помощью «двойных» клеток 2×2 (см. рис.) При такой раскраске во всём квадрате 10×10 неодинаковое количество черных и белых клеток (всего 48 белых и 52 белых клетки 1×1), а любой прямоугольник 1×4 или 4×1 содержит по две черных и белых клетки 1×1. Поэтому «распределить» все 100 клеток квадрата 10×10 по таким прямоугольникам нельзя.