Межрегиональная олимпиада школьников «Будущие исследователи – будущее науки» по математике»
Отборочный тур

9 класс

9.1. Докажите, что не существует действительных чисел x, y, для которых $x^2-3xy+3y^2+1=0$.

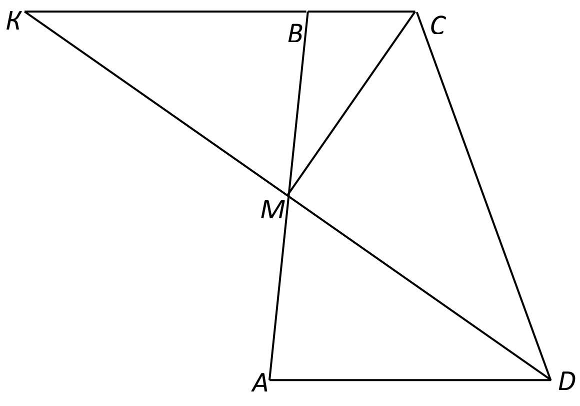
<u>Решение.</u> Преобразуем выражение $x^2-3xy+3y^2+1$, выделив полный квадрат: $x^2-3xy+3y^2+1=\left(x-\frac{3}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2+1$. Следовательно, выражение $x^2-3xy+3y^2+1$ при любых (действительных) x, y принимает положительные значения, и поэтому не существует x, y, для которых $x^2-3xy+3y^2+1=0$.

9.2. В стране 89 городов, некоторые пары городов соединены прямыми авиалиниями, всего таких прямых авиалиний 2023. Докажите, что города нельзя разбить на две группы так, чтобы любая прямая авиалиния соединяла два города из разных групп.

<u>Решение.</u> Предположим, от противного, что такое разбиение на две группы возможно. Пусть в одной группе x городов, тогда в другой $(89 - x)$. Поскольку, в силу нашего предположения, нет авиалиний между городами одной и той же группы, количество авиалиний не превосходит $x(89 - x)$. Квадратичная функция $y = x(89 - x)$ достигает наибольшего значения при $x = 44.5$, а для целых аргументов наибольшее значение достигается при $x = 44$ и $x = 45$, оно равно $1980 < 2023$. Противоречие. *Комментарий. Нетрудно непосредственно проверить требуемое неравенство, поскольку* $(45 + c)(44 - c) \le 45\cdot 44 = 1980$ *при неотрицательных целых* c.

9.3. Дана трапеция $ABCD$, у которой боковая сторона CD равна сумме оснований $AD+BC$. Биссектриса угла D пересекает боковую сторону AB в точке M. Найдите угол CMD.

<u>Ответ</u>. 90°. **<u>Решение.</u>** Продлим DM до пересечения с прямой BC, точку пересечения прямых DM и BC обозначим через K. Так как $\angle ADM = \angle MDC$ и $\angle ADK = \angle DKC$ (в силу параллельности оснований), то $\angle KDC = \angle DKC$. Значит, треугольник CKD равнобедренный: $CK = CD$. Тогда $BK = CK - BC = CD - BC = AD$ (по условию задачи). Учитывая параллельность $BK \parallel AD$, получаем отсюда, что $AKBD$ – параллелограмм, в котором точка M – точка пересечения диагоналей. Значит, M – середина KD. Поскольку треугольник CKD равнобедренный, его медиана CM является высотой и поэтому $\angle CMD = 90°$.



9.4. Докажите, что существует 100 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно три простых.

<u>Решение.</u> Рассмотрим первые 100 натуральных чисел: 1, 2, …, 100. Среди них больше трёх простых (даже в первой десятке четыре простых числа). С другой стороны, можно указать 100 последовательных натуральных чисел, среди которых простых чисел нет. Действительно, рассмотрим сто последовательных чисел: $101! + 2$, $101! + 3$, …, $101! +101$ (напомним: $n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$). Все эти числа – составные (первое из них делится на 2, второе – на 3, сотое – на 101). Обозначим через $S(n)$ количество простых среди последовательных чисел n, $n + 1$,…, $n + 99$. Имеем: $S(1) > 3$ и $S(101!+2) = 0$. Далее, заметим, что если сдвинуться на единицу от сотни последовательных чисел n, $n + 1,\ldots$, $n + 99$ и перейти к $n + 1$, $n + 2,\ldots$, $n + 100$, то при этом могут быть три случая: 1) $S(n+1) = S(n)$ (в случае, когда числа n и $(n+100)$ либо оба простые, либо оба составные); 2) $S(n+1) = S(n) – 1$ (в случае, когда n простое, а $(n+100)$ составное); и 3) $S(n+1) = S(n) + 1$ (в случае, когда n составное, а $(n+100)$ простое). Во всех случаях значение $S(n)$ при увеличении n на единицу не может «прыгнуть» больше, чем на единицу. Значит, «пропустить» значение $S(n) = 3$ невозможно (оно обязательно достигается при некотором $n < 101! + 2$).

Межрегиональная олимпиада школьников «Будущие исследователи – будущее науки» по математике»
Отборочный тур 2022/23

Вариант 2.

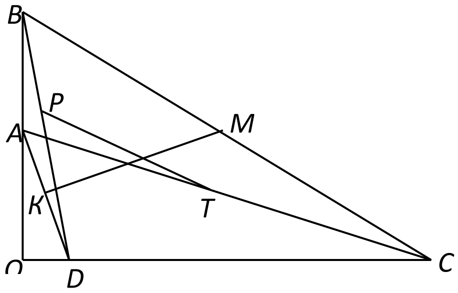
9 класс

9.1. Докажите неравенство $|2a-1| \le a^2-a+2$.

Решение. При $a>1/2$ имеем $2a-1 \le a^2-a+2 \Leftrightarrow a^2-3a+3 \ge 0$. Это неравенство верно, поскольку старший коэффициент положительный, а дискриминант меньше нуля. При $a \le 1/2$ имеем $1-2a \le a^2-a+2 \Leftrightarrow a^2+a+1 \ge 0$, и это неравенство справедливо на том же основании.

9.2. Дан четырехугольник $ABCD$. Известно, что продолжения сторон AB и CD пересекаются под прямым углом. Докажите, что отрезок между серединами сторон AD и BC равен отрезку между серединами диагоналей.

Решение. Пусть K – середина AD, M – середина BC, T – середина AC, P – середина BD.



Требуется доказать, что $KM = PT$. В треугольнике ABD отрезок KP – средняя линия, следовательно, $KP \parallel AB$ и $KP = AB/2$. Аналогично, $MT \parallel AB$, $MT = AB/2$ как средняя линия треугольника ABC. Значит, $KP \parallel MT$, $KP = MT$ и, следовательно, $KPMT$ – параллелограмм. Кроме того, $KT \parallel CD$ как средняя линия треугольника ACD. Поскольку $KP \parallel AB$, $KT \parallel CD$ и по условию задачи $AB \perp CD$, то $KP \perp KT$. Таким образом, $KPMT$ – прямоугольник и $PT = KM$ как диагонали прямоугольника. *Комментарий. Приведено «чисто геометрическое» доказательство, но с использованием координатного метода (с началом координат в точке O) или векторов получается даже более простое решение.*

9.3. а) Прямоугольник $ABCD$ размера 2023см $\times$ 10 см сначала разбили на клетки (квадратики) со стороной 1см, а затем провели диагональ AC. На сколько всего частей разбился прямоугольник? **б)** Аналогичная задача для прямоугольника размера 2023см $\times$ 34 см.

Ответ. **а)** 22 262; **б)** 70 822.

Решение. а) а) Рассмотрим данный прямоугольник на координатной плоскости, у которой точка A – начало координат, ось x идет вдоль AD, а ось y – вдоль AB. Вершины прямоугольника имеют следующие координаты: $A(0; 0)$, $B(0; 2023)$, $C(10; 2023)$, $D(10;0)$. До проведения диагонали AC прямоугольник был разбит целочисленной решёткой (сеткой) прямых $x = 1, x = 2, \ldots, x = 9$ и $y = 1, y = 2, \ldots, y = 2022$ на $2023 \times 10 = 20230$ единичных квадратиков (клеток). Уравнение диагонали AC имеет вид $y = (2023/10)\cdot x$. Она не пересекает узлы решётки внутри прямоугольника: это следует из взаимной простоты чисел 2023 и 10 (в противном случае при некотором целом x от 1 до 9 число $2023\cdot x$ делилось бы на 10.) Значит, AC пересекает все 2022 + 9 = 2031 линии сетки в разных точках и этими точками AC разбивается на 2031+1 = 2032 интервалов. Каждый такой интервал добавляет еще одну часть в предыдущее разбиение на клетки. В результате получается 20230 + 2032 = 22 262 части.

б) 2023 раскладывается на простые множители как $2023 = 7\cdot 17\cdot 17$. Поэтому наклон прямой $y = (2023/7)\cdot x$ равен целому числу 289, и на диагонали AC будет лежать 6 узлов решетки, соответствующих абсциссам $x = 1, x = 2, \ldots, x = 6$. Таким образом, количество точек пересечения AC с сеткой прямых будет на 6 меньше (по сравнению с тем, как было в случае взаимно простых сторон пункта **а)**, где получалось бы 2022 + 6). Другими словами, данные вертикальные прямые сетки не дают новых пересечений с AC и таким образом, на AC лежит 2022 точки пересечения (только с горизонтальными прямыми сетки), а всего частей разбиения будет 2023·7 + 2022 + 1 = 16 184.

Диагональ AC имеет уравнение $y = (2023/34)\cdot x$, и наклон этой прямой 119/2. Поэтому вертикальные прямые с четными абсциссами пересекают AC в узлах решетки и не дают новых пересечений, а 17 прямых с нечетными абсциссами $x = 1$, $x = 3$, …, $x = 33$ дают 17 неузловых точек пересечения. Таким образом, подсчитывая так же, как в задаче 8.3, получим всего 2023·34 + 2022 + 17 + 1 = 70 822 части.

9.4. Существуют ли такие пять натуральных чисел (не обязательно различных), что сумма любых трёх из них – простое число, если среди этих пяти чисел **а)** по меньшей мере три различных; **б)** по меньшей мере четыре различных?

Ответ. **а)** существуют **б)** не существуют**.**

Решение. **а)** Пример искомых пяти чисел можно привести такой: 1; 1; 1; 5; 17. **б)** Рассмотрим остатки от деления данных пяти чисел на 3. Если среди остатков встречаются все три {0;1;2}, то сумма трех чисел с различными остатками даст число, делящееся на 3 и отличное от 3, т.е. сумма этих трех чисел – число составное. Если же встречаются только 2 остатка, то среди пяти чисел должно встретиться три с одинаковым остатком, и тогда сумма этих трех чисел делится на 3 и отлично от 3.