

Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки» по математике
Финальный тур 19.01.2025

Каждая из пяти задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 20 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов.

10 класс

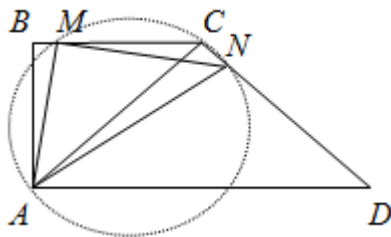
10.1. Решите уравнение $64(x^2 + x)^3 + 1 = 0$.

Ответ: $x = -\frac{1}{2}$. **Решение.** Запишем уравнение в виде: $(x^2 + x)^3 = (-1/4)^3$. Оно равносильно такому:

$x^2 + x = -1/4$, поскольку равенство кубов двух чисел означает равенство самих чисел. Тогда $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$, т.е. $x = -\frac{1}{2}$.

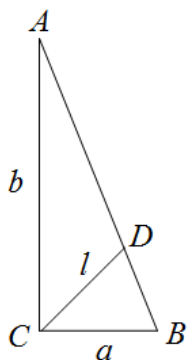
10.2. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 2$ и $BC = 1$. Боковая сторона AB , равная 1, перпендикулярна основаниям. На сторонах BC и CD взяты соответственно точки M и N такие, что $\angle MAN = 45^\circ$. Найдите все углы треугольника MAN .

Ответ: $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$. **Решение.** Сначала найдем все углы трапеции. Из условия $AB \perp BC$ и равенства $AB = BC$ следует, что $\angle BCA = \angle BAC = 45^\circ$. Условие $AD = 2$ означает, что $\angle CDA = 45^\circ$ (так как если опустить высоту из точки C на основание, то образуется прямоугольный треугольник с единичными катетами). Поэтому $\angle ACD = 90^\circ$, $\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD = 135^\circ$. Поскольку по условию $\angle MAN = 45^\circ$, то $\angle MCN + \angle MAN = 180^\circ$, т.е. четырехугольник $AMCN$ является вписанным. По свойству вписанных углов имеем: $\angle AMN = \angle ACN = 90^\circ$ и $\angle MNA = \angle MCA = 45^\circ$.



10.3. Дан прямоугольный треугольник, у которого численные значения периметра и площади – числа рациональные. Обязательно ли **а)** длина гипотенузы – рациональное число? **б)** длина биссектрисы прямого угла – иррациональное число?

Ответ: **а)** обязательно; **б)** обязательно. **Решение.** **а)** Пусть P и S – периметр и площадь, соответственно, данного треугольника ABC с прямым углом C , $AC = b$, $CB = a$. Тогда $S = ab/2$. Из формулы для радиуса вписанной окружности $r = \frac{2S}{P}$ и условий задачи следует рациональность числа r . С



другой стороны, в прямоугольном треугольнике $r = \frac{a + b - c}{2} = \frac{P - 2c}{2}$. Отсюда

$c = \frac{P}{2} - r$ – рациональное число. **б)** Пусть $CD = l$ – биссектриса прямого угла. В силу

пункта **а)** число $a + b = P - c$ рациональное. Поскольку $\angle ACD = \angle BCD = 45^\circ$, то:

$$S = S_{ACD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}al \sin 45^\circ + \frac{1}{2}bl \sin 45^\circ = \frac{1}{2}l(a + b) \sin 45^\circ = \frac{1}{4}l(a + b) \cdot \sqrt{2}.$$

Если предположить, что l – число рациональное, то S будет иррациональным числом, что противоречит условию. Значит, длина биссектрисы прямого угла – иррациональное число. *Комментарий. Другое решение пункта а) получается так: пусть $x = a + b$. Тогда по теореме Пифагора $c = \sqrt{x^2 - 4S} = P - x$ и после возведения в квадрат будем иметь $x = (P^2 + 4S)/(2P)$. Значит, $c = P - x$ – рациональное число.*

10.4. Сколько решений в целых числах x, y имеет уравнение $6x^2 + 2xy + y + x = 2025$?

Ответ: 8 решений. **Решение.** Выразим y из данного уравнения: $y = \frac{2025 - 6x^2 - x}{2x + 1}$. Разделив $6x^2 + x$ с

остатком на $2x + 1$, получим $6x^2 + x = (3x - 1)(2x + 1) + 1$. Таким образом, выражение для y примет вид:

$$y = \frac{2025 - (3x - 1)(2x + 1) - 1}{2x + 1} = \frac{2024}{2x + 1} - 3x + 1. \text{ Это число будет целым тогда и только тогда, когда } 2024$$

делится на $2x + 1$. Поскольку $2x + 1$ – нечетное число, а $2024 : 8 = 253 = 11 \cdot 23$, то $2x + 1$ может принимать значения делителей числа 253, а именно, четырех натуральных делителей 1, 11, 23, 253, и еще четырех отрицательных, т.е. всего получаем 8 значений.

10.5. Докажите, что 20 натуральных чисел: от 1 до 20 можно разбить на две группы так, чтобы сумма чисел первой группы равнялась произведению чисел второй. **а)** Какое наименьшее и **б)** какое наибольшее количество чисел может быть во второй группе?

Ответ: **а)** 3; **б)** 5. **Решение.** **а)** Сумма всех чисел от 1 до 20 равна 210. Очевидно, что во второй группе больше одного числа, так как в противном случае оно было бы равно сумме оставшихся 19 чисел, т.е. не меньше, чем $1 + 2 + \dots + 19 = 190$. Покажем, что на самом деле во второй группе больше двух чисел. Действительно, в противном случае для чисел a и b из второй группы выполнялось бы равенство $210 - a - b = ab$, которое приводится к виду $211 = (a + 1)(b + 1)$. Однако последнее уравнение не имеет решений в целых числах от 1 до 20, так как число 211 – простое. Приведем теперь пример второй группы из трёх чисел. Будем искать такой пример в наиболее простом виде, считая, что одно из искомых чисел равно 1. Тогда оставшиеся два числа найдём из равенства $209 - a - b = ab$, которое приведем к виду $210 = (a + 1)(b + 1)$. Последнее уравнение даёт два примера, подходящие под условие задачи: (1, 9, 20) и (1, 13, 14). **б)** Количество чисел во второй группе меньше шести: действительно, в противном случае их произведение было бы не меньше $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720 > 210$. Пример из пяти чисел попробуем найти в виде набора (1, 2, 3, 4, x) с неизвестным x (от 5 до 20). Число x должно удовлетворять уравнению $210 - 10 - x = 24x$, т.е. $25x = 200$. Получаем решение $x = 8$, следовательно, набор (1, 2, 3, 4, 8) удовлетворяет условию задачи.