

Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки» по математике
Финальный тур 19.01.2025

Каждая из пяти задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 20 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов.

11 класс

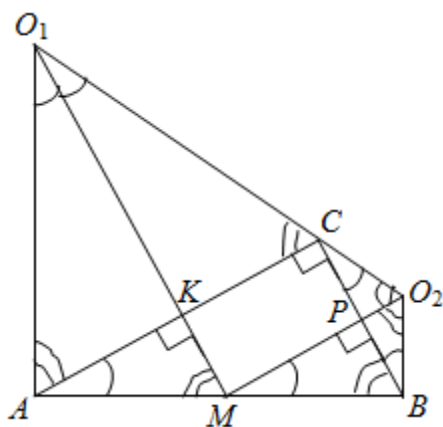
11.1. Решите уравнение $2\cos^4 x - \sin^3 x = 1$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi$; $(-1)^{n+1} \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \pi$; $n \in \mathbb{Z}$. **Решение.** С помощью основного

тригонометрического тождества выразим $\cos^4 x$ через $\sin x$ и обозначим $y = \sin x$, $|y| \leq 1$. В результате этой замены получим уравнение $2y^4 - y^3 - 4y^2 + 1 = 0$. У многочлена $2y^4 - y^3 - 4y^2 + 1$ есть рациональные корни $y = -1$ и $y = 1/2$ (для подбора корней можно проверить «кандидатов»: ± 1 ; $\pm 1/2$). Тогда после деления уголком на многочлен $(y+1)(2y-1) = 2y^2 + y - 1$ получим уравнение $y^2 - y - 1 = 0$. Его корни $y = (1 \pm \sqrt{5})/2$, но $(1 + \sqrt{5})/2$ не удовлетворяет условию $|y| \leq 1$. Решая стандартные тригонометрические уравнения $\sin x = -1$, $\sin x = 1/2$, $\sin x = (1 - \sqrt{5})/2$, получаем ответ.

11.2. Дан прямоугольный треугольник ABC (C – вершина прямого угла) с острым углом α при вершине A . Две окружности с центрами O_1 и O_2 проходят через вершины A , C и B , C , соответственно, и касаются прямой AB . Найдите отношение площадей треугольников ABC и O_1MO_2 , где M – середина гипотенузы AB .

Ответ: $\sin^2 2\alpha$. **Решение.** Пусть K – середина AC , P – середина BC , тогда MK и MP – средние линии



треугольника ABC , следовательно, $MK \perp AC$, $MP \perp BC$. $AO_1 = CO_1$ как радиусы окружности с центром в O_1 , значит, треугольник AO_1C – равнобедренный. Поэтому O_1K – медиана, высота и биссектриса треугольника AO_1C . Т.к. $MK \perp AC$ и $O_1K \perp AC$, то точки O_1 , M и K лежат на одной прямой. Поскольку окружность с центром в O_1 касается прямой AB в точке A , то $O_1A \perp AB$. Следовательно, $\angle O_1AC = \angle O_1CA = 90^\circ - \alpha = \angle ABC$, тогда $\angle AO_1K = \angle KO_1C = \angle BAC = \alpha$. Аналогично, треугольник BO_2C – равнобедренный, точки O_2 , M и P лежат на одной прямой, $O_2B \perp AB$ и острые углы в равных прямоугольных треугольниках CO_2P и BO_2P равны α и $90^\circ - \alpha$ (см. рис.). Тогда $\angle O_1CA + \angle ACB + \angle O_2CB = 90^\circ - \alpha + 90^\circ + \alpha = 180^\circ$ и значит, точки O_1 , C и O_2 лежат на одной прямой, а треугольники ACB и

O_1MO_2 подобны по двум углам. Обозначим коэффициент подобия $k = \frac{AC}{O_1M}$. Пусть $AC = b$, $BC = a$,

тогда $\operatorname{tg} \alpha = a/b$ и из прямоугольного треугольника KO_1C имеем $O_1K = 0,5b \cdot \operatorname{ctg} \alpha$. Тогда

$$O_1M = O_1K + KM = 0,5b \cdot \operatorname{ctg} \alpha + 0,5a \quad \text{и} \quad k = \frac{AC}{O_1M} = \frac{2b}{b \cdot \operatorname{ctg} \alpha + a} = \frac{2}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \sin 2\alpha,$$

$$\text{откуда} \quad \frac{S_{ABC}}{S_{O_1MO_2}} = k^2 = \sin^2 2\alpha.$$

11.3. Для данного треугольника ABC с соответствующими сторонами a , b , c рассматривают уравнение $ax^4 + bx = c$. Докажите, что у этого уравнения ровно два корня, они разных знаков, причем отрицательный корень по модулю больше положительного.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = ax^4 + bx - c$ и исследуем её на монотонность с помощью производной. Имеем $f'(x) = 4ax^3 + b$ и значит, $f'(x) = 0$ при $x = -\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$. Т.к. функция $4ax^3 + b$ возрастает на $\mathbf{R}$, то $f'(x) < 0$ при $x < -\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$ и $f'(x) > 0$ при $x > -\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$. Поэтому $f(x)$ убывает на $(-\infty, -\sqrt[3]{b/(4a)}]$ и возрастает на $[-\sqrt[3]{b/(4a)}, +\infty)$, а значит, на каждом из этих полуинтервалов имеет не более одного корня, т.е. уравнение $ax^4 + bx = c$ имеет не более двух корней. Поскольку $f(0) = -c < 0$ и $f(1) = a + b - c > 0$ (по неравенству треугольника), то в силу непрерывности $f(x)$, на интервале $(0; 1)$ есть корень уравнения. Далее, по неравенству треугольника, $f(-1) = a - b - c < 0$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, поэтому второй корень меньше (-1) . Итак, положительный корень уравнения меньше 1, а модуль отрицательного корня больше 1, т.е. отрицательный корень по модулю больше положительного.

Замечание. Можно было решить задачу графически, записав уравнение в виде $ax^4 = -bx + c$ и используя лишь положительность a, b, c . Существование единственного положительного корня уравнения очевидно, а для единственности отрицательного корня (формально, кроме наглядности) требуется проверить монотонность производной ax^4 (выпуклость). Сравнение корней тоже тогда очевидно из графика. Решение выше в тексте даёт более сильное сравнение с единицей (по модулю).

11.4. а) Определите количество положительных корней уравнения $9 \cdot x^{6x} = 1$; **б)** есть ли у этого уравнения отрицательные корни?

Ответ: а) 2 корня; б) нет. **Решение.** а) При $x > 0$ после логарифмирования получим уравнение, эквивалентное исходному

$$x \cdot \ln x = -\frac{\ln 3}{3} \quad (*)$$

Исследуем функцию левой части (*): $y = x \ln x \Rightarrow y' = 1 + \ln x$. Тогда

$y' > 0$ при $x > \frac{1}{e}$ и $y' < 0$ при $0 < x < \frac{1}{e}$. Поэтому функция $y = x \ln x$

убывает на $(0, \frac{1}{e})$ и возрастает на $(\frac{1}{e}, +\infty)$. В точке $x_0 = \frac{1}{e}$ значение

минимума $y_0 = \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$. Непосредственно подставляя число $x = 1/3$ в исходное уравнение (или в

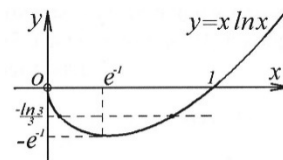
(*)), убеждаемся, что это корень. Поскольку он меньше точки минимума $1/e$ и т.к. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$,

должен быть еще ровно один корень, больший $1/e$. **б)** Пусть теперь $x < 0$. В этом случае выражение x^{6x} будет определено лишь при условии, что $6x$ – число целое. Очевидно, $6x$ должно быть четным

числом (иначе $x^{6x} < 0$). Пусть $x = -\frac{k}{3}$, где k – натуральное число. Тогда $\left(\frac{k}{3}\right)^{-2k} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{k}\right)^k = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow 3^{k+1} = k^k \Rightarrow k = 3n$ для некоторого натурального n . Таким образом, $3^{3n+1} = (3n)^{3n} \Leftrightarrow n^{3n} = 3$.

Значение $n = 1$ последнему уравнению не удовлетворяет, а при $n \geq 2$ левая часть, очевидно, больше правой. Итак, отрицательных корней исходное уравнение не имеет.



11.5. Дан выпуклый n -угольник $A_1A_2\dots A_n$ и точка M на плоскости. Пусть M_i – проекция M на прямую A_iA_{i+1} (где $A_{n+1}=A_1$). Докажите, что если выполняется равенство

$$4(A_1M_1^2 + A_2M_2^2 + \dots + A_nM_n^2) = A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + \dots + A_nA_1^2,$$

то около n -угольника можно описать окружность.

Решение. Обозначим через x_i , y_i и h_i длины отрезков A_iM_i , A_iM_{i-1} и MM_i соответственно. Выражая гипотенузу A_iM в двух прямоугольных треугольниках, получим $A_iM^2 = x_i^2 + h_i^2 = y_i^2 + h_{i-1}^2$, где $h_0 = h_n$. Складывая эти равенства для всех i , получим

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2. \quad (*)$$

Далее, $x_i + y_{i+1} = A_iM_i + M_iA_{i+1} \geq A_iA_{i+1}$ для всех i , отсюда $A_iA_{i+1}^2 \leq x_i^2 + y_{i+1}^2 + 2x_iy_{i+1} \leq 2(x_i^2 + y_{i+1}^2)$, причем равенство здесь возможно лишь в случае, когда $x_i = y_{i+1}$. Складывая эти неравенства и учитывая (*), получим $A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + \dots + A_nA_1^2 \leq 4(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$. Равенство здесь возможно лишь при условии $x_i = y_{i+1}$ для всех i , т.е. когда M проектируется в середины всех сторон n -угольника. Поэтому точка M – центр окружности, описанной около n -угольника.