

Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки» по математике
Финальный тур 19.01.2025

Каждая из пяти задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 20 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов.

7 класс

- 7.1.** Коля и Оля бежали по очереди по два круга на стадионе. Коля бежал оба круга со своей максимальной скоростью, затратив 10 минут. Оля бежала первый круг со своей максимальной скоростью, а второй круг – со скоростью, на 20% меньшей, и затратила 15 минут. Найдите отношение максимальных скоростей Коли и Оли.

Ответ: 4:3. Решение. Пусть v (м/мин) – максимальная скорость Коли, u (м/мин) – максимальная скорость

Оли, S (м) – длина круговой дорожки. Тогда из условий задачи имеем: $\frac{2S}{v} = 10$ и $\frac{S}{u} + \frac{S}{0,8u} = 15$.

Отсюда $\frac{S}{v} = 5$ и $\frac{S}{u} \left(1 + \frac{5}{4}\right) = 15$. Разделив второе уравнение на первое, получим $\frac{9}{4} \cdot \frac{v}{u} = 3 \Leftrightarrow \frac{v}{u} = \frac{4}{3}$.

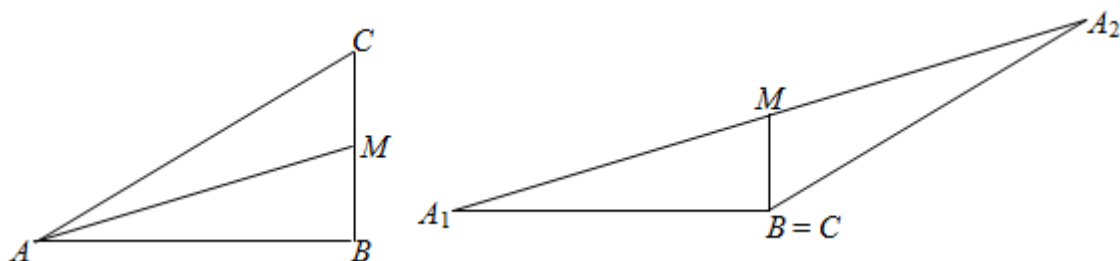
- 7.2.** Является ли простым число **а)** $3^{2025} + 2$; **б)** $5^{2025} + 8$?

Ответ: а) нет; б) нет. Решение. а) Рассмотрим степени числа 3: $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, $3^5 = 243$, ...

Последняя цифра степени числа 3 повторяется через четыре, а именно: 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1 ... Число 2025 при делении на 4 дает остаток 1 (т.к. $2025 = 4 \cdot 506 + 1$). Следовательно, последняя цифра 3^{2025} совпадает с последней цифрой 3^1 и равна 3, а поэтому число $3^{2025} + 2$ оканчивается на 5. Значит, $3^{2025} + 2$ делится на 5. **б)** Результат следует из формулы суммы кубов $5^{2025} + 8 = (5^{675})^3 + 2^3 = (5^{675} + 2)(5^{1350} - 2 \cdot 5^{675} + 4)$, т.е. число $5^{2025} + 8$ является составным, т.к. числа в обеих скобках больше единицы. *Комментарий. Результат пункта б) следует также из делимости данного числа на 7 (или на 13), т.к. остатки степеней пятёрки при делении на 7 повторяются с периодом 6 (а при делении на 13 - с периодом 4), и 2025 даёт остаток 3 при делении на 6 (и остаток 1 при делении на 4), а поэтому результат получается из делимости $125+8=133$ на 7 (и $5+8=13$ на 13).*

- 7.3.** Петя говорит Вите: "Если ты вырежешь произвольный треугольник, то я разрежу его прямым разрезом на два треугольника, а затем склею из них (по двум сторонам) новый треугольник, не равный исходному". Верно ли Петя считает, что такое построение всегда возможно?

Ответ: верно. Решение. Разрежем треугольник по медиане, проведенной из вершины меньшего угла, скажем, угла A , и составим новый треугольник таким образом, чтобы соединились половинки стороны, к которой проведена медиана AM (для этого можно треугольник ACM повернуть на 180° по часовой стрелке вокруг точки M – см. рис.). Покажем, что новый треугольник не равен исходному. В новом треугольнике стороны BM и CM склеены, так что точки B и C совпадают. Поскольку $\angle AMB + \angle AMC = 180^\circ$, точки A_1 , M и A_2 будут лежать на одной прямой. Получим треугольник A_1A_2B ,



в котором $\angle A_1BA_2 = \angle ABM + \angle MCA$, этот угол больше любого угла треугольника ABC , и значит, треугольники ABC и A_1A_2B не равны. *Замечание. В случае прямоугольного треугольника при разрезании по медиане, проведенной из вершины прямого угла, данная конструкция даст треугольник, равный исходному, и поэтому в данном случае разрез нужно проводить по медиане из острого угла.*

- 7.4. На доске записано 10 чисел: 1, 2, ..., 10. За одну операцию разрешается стереть с доски любые два числа a, b , а вместо них записать числа $2a^2 + 3b^2$ и $2b^2 + 3a^2$. Может ли получиться так, что в результате нескольких операций на доске будут записаны 10 одинаковых чисел?

Ответ: не может. **Решение.** Легко видеть, что число $2a^2 + 3b^2$ имеет ту же четность, что b , а число, $2b^2 + 3a^2$ имеет ту же четность, что a . Действительно, разность $2a^2 + 3b^2 - b$ четна, поскольку числа $3b^2$ и b одинаковой четности (оба четны при четном b или оба нечетны при нечетном b). Аналогично, $2b^2 + 3a^2$ имеет ту же четность, что a . Поскольку вначале было 5 четных и 5 нечетных чисел, то после каждой операции на доске должно оставаться 5 четных и 5 нечетных чисел. Значит, все 10 чисел одинаковой четности получиться не могут. *Комментарий.* Отметим, что в решении существенно используется инвариант – количество четных (нечетных) чисел на доске. Если вначале на доске записаны различные числа одной четности, то в процессе могут получиться одинаковые числа (см. решение задачи 7.4 финала БИБН 2019 года: приведен пример 10 различных чисел, которые в процессе аналогичных операций $(a, b) \rightarrow (a+2b, b+2a)$ дают 10 одинаковых чисел).

- 7.5. В классе 30 человек. Оказалось, что у любых двух мальчиков различное число подруг в классе и у любых двух девочек различное число друзей среди мальчиков класса. а) Докажите, что в классе поровну мальчиков и девочек; б) обязательно ли в классе есть мальчик, у которого ровно 8 подруг?

Ответ: б) обязательно. **Решение.** а) Предположим противное и будем считать, для определенности, что мальчиков больше, чем девочек. Тогда мальчиков в классе не менее 16, а девочек – не более 14. Таким

	M1	M2	M3	...	M14	M15
Д1	+	+	+		+	+
Д2		+	+		+	+
Д3			+		+	+
...						
Д14					+	+
Д15						+

образом, число подруг у мальчиков может принимать не более 15 значений (от 0 до 14). Значит, не у всех мальчиков разное число подруг. Противоречие доказывает наше утверждение. б) Если предположить противное, то число подруг у мальчиков принимает, кроме числа 8, 15 значений, а именно 0, 1, ..., 7, 9, ..., 15. Поскольку есть мальчик, у которого все 15 девочек – подруги, каждая девочка дружит хотя бы с одним мальчиком класса, и для всех девочек число мальчиков-друзей принимает все 15 значений от 1 до 15. Составим таблицу «дружб»: в клетках таблицы стоит «+», если соответствующие мальчик и девочка дружат (см. пример на рисунке). Тогда число плюсов, если считать по строкам (число друзей для девочек), получится $1+2+\dots+15 = 120$, а по столбцам $0+1+\dots+7+9+\dots+15 = 112$. Противоречие.