

Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки» по математике
Финальный тур 19.01.2025

Каждая из пяти задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 20 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов.

8 класс

- 8.1.** Коля и Оля бежали по очереди по два круга на стадионе. Коля бежал оба круга со своей максимальной скоростью, затратив 10 минут. Оля бежала первый круг со своей максимальной скоростью, а второй круг – со скоростью, на 20% меньшей, и затратила 15 минут. Найдите отношение максимальных скоростей Коли и Оли.

Ответ: 4:3. Решение. Пусть v (м/мин) – максимальная скорость Коли, u (м/мин) – максимальная скорость

Оли, S (м) – длина круговой дорожки. Тогда из условий задачи имеем: $\frac{2S}{v} = 10$ и $\frac{S}{u} + \frac{S}{0,8u} = 15$.

Отсюда $\frac{S}{v} = 5$ и $\frac{S}{u} \left(1 + \frac{5}{4}\right) = 15$. Разделив второе уравнение на первое, получим $\frac{9}{4} \cdot \frac{v}{u} = 3 \Leftrightarrow \frac{v}{u} = \frac{4}{3}$.

- 8.2.** Одну сторону прямоугольника (ширину) увеличили на $n\%$, а другую (длину) – на $m\%$ ($n \geq m$ – положительные числа). **а)** На сколько процентов площадь нового прямоугольника больше площади исходного? **б)** Мог ли при этом периметр увеличиться более, чем на $n\%$?

Ответ: а) на $\left(m + n + \frac{mn}{100}\right)\%$, **б)** не мог. **Решение. а)** Пусть a – ширина, b – длина исходного

прямоугольника. Тогда стороны нового прямоугольника равны $\left(1 + \frac{n}{100}\right)a$ и $\left(1 + \frac{m}{100}\right)b$, а его площадь

$S = \left(1 + \frac{n}{100}\right)a \left(1 + \frac{m}{100}\right)b = \left(1 + \frac{m+n}{100} + \frac{mn}{10000}\right)ab$, что составляет $100\% + \left(m + n + \frac{mn}{100}\right)\%$ от площади

исходного прямоугольника. **б)** От противного: пусть периметр нового прямоугольника стал на $x\%$ (где $x > n$) больше исходного периметра P . Тогда $2\left(\left(1 + \frac{n}{100}\right)a + \left(1 + \frac{m}{100}\right)b\right) = 2\left(1 + \frac{x}{100}\right)(a + b)$, откуда

$(n - x)a = (x - m)b$. По предположению противного в левой части полученного равенства стоит отрицательное число, а в правой – положительное. Противоречие. *Замечание. Пункт б) можно решить*

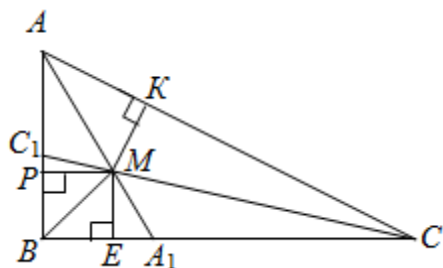
с помощью такого неравенства: новый периметр не больше $2\left(\left(1 + \frac{n}{100}\right)a + \left(1 + \frac{n}{100}\right)b\right) = \left(1 + \frac{n}{100}\right)P$.

- 8.3.** Можно ли 36 натуральных чисел от 1 до 36 разбить на две группы так, чтобы сумма чисел первой группы равнялась произведению чисел второй группы?

Ответ: можно. Решение. Сумма всех чисел от 1 до 36 равна 666. Очевидно, что во второй группе больше одного числа, так как в противном случае оно было бы равно сумме оставшихся 35 чисел, т.е. не меньше, чем $1 + 2 + \dots + 35 = 630$. Попробуем найти вторую группу из двух чисел a и b , где $a < b$. Тогда получим равенство $666 - a - b = ab$, которое приводится к виду $667 = (a + 1)(b + 1)$. Число 667 представимо в виде произведения двух простых чисел: $667 = 23 \cdot 29$. Так как a и b не превосходят 36, то равенство $667 = (a + 1)(b + 1)$ возможно только при $a = 22$, $b = 28$.

- 8.4.** В треугольнике ABC биссектрисы углов A и C пересекаются в точке M . Угол AMC равен 135° . Найдите отношение расстояния от M до вершины B к расстоянию от M до прямой AC .

Ответ: $\sqrt{2}$. **Решение.** Пусть AA_1 и CC_1 – биссектрисы треугольника ABC . Т.к. $\angle AMC = 135^\circ$, то в треугольнике AMC имеем: $\angle MAC + \angle MCA = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$, откуда



$\angle BAC + \angle BCA = 2(\angle MAC + \angle MCA) = 90^\circ$. Значит, $\angle ABC = 90^\circ$. Т.к. биссектрисы любого треугольника пересекаются в одной точке, то BM – биссектриса угла ABC и точка M равноудалена от сторон треугольника ABC (она является центром вписанной окружности). Опустим из точки M перпендикуляры MP , ME и MK соответственно на стороны AB , BC и AC . Тогда $MP = ME = MK$. В силу того, что $\angle ABC = \angle BPM = \angle BEM = 90^\circ$ и $MP = ME$, четырехугольник $BPME$ – квадрат, а его диагональ $BM = MP \cdot \sqrt{2}$ есть расстояние от M до вершины B . Таким образом,

$$\frac{BM}{MK} = \frac{MP\sqrt{2}}{MK} = \frac{MK\sqrt{2}}{MK} = \sqrt{2}.$$

- 8.5.** В классе 30 человек. Оказалось, что у любых двух мальчиков различное число подруг в классе и у любых двух девочек различное число друзей среди мальчиков класса. **а)** Докажите, что в классе поровну мальчиков и девочек; **б)** обязательно ли в классе есть мальчик, у которого ровно 8 подруг?

Ответ: **б)** обязательно. **Решение.** **а)** Предположим противное и будем считать, для определённости, что мальчиков больше, чем девочек. Тогда мальчиков в классе не менее 16, а девочек – не более 14. Таким

	M1	M2	M3	...	M14	M15
Д1	+	+	+		+	+
Д2		+	+		+	+
Д3			+		+	+
...						
Д14					+	+
Д15						+

образом, число подруг у мальчиков может принимать не более 15 значений (от 0 до 14). Значит, не у всех мальчиков разное число подруг. Противоречие доказывает наше утверждение. **б)** Если предположить противное, то число подруг у мальчиков принимает, кроме числа 8, 15 значений, а именно 0, 1, ..., 7, 9, ..., 15. Поскольку есть мальчик, у которого все 15 девочек – подруги, каждая девочка дружит хотя бы с одним мальчиком класса, и для всех девочек число мальчиков-друзей принимает все 15 значений от 1 до 15. Составим таблицу «дружб»: в клетках таблицы стоит «+», если соответствующие мальчик и девочка дружат (см. пример на рисунке). Тогда число плюсов, если считать по строкам (число друзей для девочек), получится $1+2+\dots+15 = 120$, а по столбцам $0+1+\dots+7+9+\dots+15 = 112$. Противоречие.