

Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки» по математике
Финальный тур 19.01.2025

Каждая из пяти задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 20 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов.

9 класс

- 9.1.** Одну сторону прямоугольника (ширину) увеличили на $n\%$, а другую (длину) – на $m\%$ ($n \geq m$ – положительные числа). **а)** На сколько процентов площадь нового прямоугольника больше площади исходного? **б)** Мог ли при этом периметр увеличиться более, чем на $n\%$?

Ответ: **а)** на $\left(m + n + \frac{mn}{100}\right)\%$, **б)** не мог. **Решение.** **а)** Пусть a – ширина, b – длина исходного

прямоугольника. Тогда стороны нового прямоугольника равны $\left(1 + \frac{n}{100}\right)a$ и $\left(1 + \frac{m}{100}\right)b$, а его площадь

$$S = \left(1 + \frac{n}{100}\right)a \left(1 + \frac{m}{100}\right)b = \left(1 + \frac{m+n}{100} + \frac{mn}{10000}\right)ab,$$
 что составляет $100\% + \left(m + n + \frac{mn}{100}\right)\%$ от площади

исходного прямоугольника. **б)** От противного: пусть периметр нового прямоугольника стал на $x\%$ (где $x > n$) больше исходного периметра P . Тогда $2\left(\left(1 + \frac{n}{100}\right)a + \left(1 + \frac{m}{100}\right)b\right) = 2\left(1 + \frac{x}{100}\right)(a + b)$, откуда

$(n - x)a = (x - m)b$. По предположению противного в левой части полученного равенства стоит отрицательное число, а в правой – положительное. Противоречие. *Замечание. Пункт б) можно решить*

с помощью такого неравенства: новый периметр не больше $2\left(\left(1 + \frac{n}{100}\right)a + \left(1 + \frac{n}{100}\right)b\right) = \left(1 + \frac{n}{100}\right)P$.

- 9.2.** Решите уравнение $64(x^2 + x)^3 + 1 = 0$.

Ответ: $x = -\frac{1}{2}$. **Решение.** Запишем уравнение в виде: $(x^2 + x)^3 = (-1/4)^3$. Оно равносильно такому:

$x^2 + x = -1/4$, поскольку равенство кубов двух чисел означает равенство самих чисел. Тогда

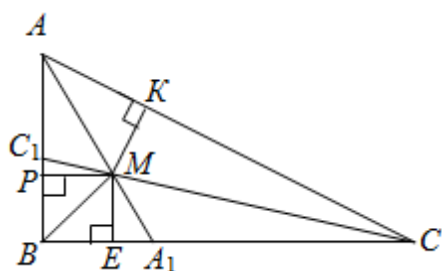
$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0, \text{ т.е. } x = -\frac{1}{2}.$$

- 9.3.** Можно ли куб разбить на 2025 кубиков?

Ответ: можно. **Решение.** Рассмотрим единичный куб. Построить его разбиение можно, например, на основе равенства $2025 = 999 + 999 + 27$, а именно: разобьем сначала куб на 1000 одинаковых кубиков с ребром $1/10$, затем один из этих кубиков разобьем на 1000 кубиков с ребром $1/100$, затем один из получившихся кубиков разобьем на 27 кубиков с ребром $1/300$. Итого получим 999 кубиков с ребром $1/10$ плюс 999 кубиков с ребром $1/100$ плюс 27 кубиков с ребром $1/300$. *Комментарий. Существуют и другие примеры разбиений. Например, после начального разбиения на 1000 кубиков, можно было взять два кубика этого разбиения и один из них разбить на 1000 кубиков, а другой – на 27. Существуют серии примеров, основанных на линейных диофантовых уравнениях $(n^3 - 1)x + (m^3 - 1)y + 1 = 2025$, где n, m – произвольные натуральные числа (от 2 до 12). При $n = 10, m = 3$ решение $x = 2, y = 1$ даёт наш пример в тексте.*

- 9.4.** В треугольнике ABC биссектрисы углов A и C пересекаются в точке M . Угол AMC равен 135° . Найдите отношение расстояния от M до вершины B к расстоянию от M до прямой AC .

Ответ: $\sqrt{2}$. **Решение.** Пусть AA_1 и CC_1 – биссектрисы треугольника ABC . Т.к. $\angle AMC = 135^\circ$, то в треугольнике AMC имеем: $\angle MAC + \angle MCA = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$, откуда



откуда $\angle BAC + \angle BCA = 2(\angle MAC + \angle MCA) = 90^\circ$. Значит, $\angle ABC = 90^\circ$. Т.к. биссектрисы любого треугольника пересекаются в одной точке, то BM – биссектриса угла ABC и точка M равноудалена от сторон треугольника ABC (она является центром вписанной окружности). Опустим из точки M перпендикуляры MP , ME и MK соответственно на стороны AB , BC и AC . Тогда $MP = ME = MK$. В силу того, что $\angle ABC = \angle BPM = \angle BEM = 90^\circ$ и $MP = ME$, четырехугольник $BPME$ – квадрат, а его диагональ $BM = MP \cdot \sqrt{2}$ есть расстояние от M до вершины B . Таким образом,

$$\frac{BM}{MK} = \frac{MP\sqrt{2}}{MK} = \frac{MK\sqrt{2}}{MK} = \sqrt{2}.$$

- 9.5. Докажите, что 20 натуральных чисел: от 1 до 20 можно разбить на две группы так, чтобы сумма чисел первой группы равнялась произведению чисел второй. а) Какое наименьшее и б) какое наибольшее количество чисел может быть во второй группе?

Ответ: а) 3; б) 5. **Решение.** а) Сумма всех чисел от 1 до 20 равна 210. Очевидно, что во второй группе больше одного числа, так как в противном случае оно было бы равно сумме оставшихся 19 чисел, т.е. не меньше, чем $1+2+\dots+19=190$. Покажем, что на самом деле во второй группе больше двух чисел. Действительно, в противном случае для чисел a и b из второй группы выполнялось бы равенство $210 - a - b = ab$, которое приводится к виду $211 = (a+1)(b+1)$. Однако последнее уравнение не имеет решений в целых числах от 1 до 20, так как число 211 – простое. Приведем теперь пример второй группы из трёх чисел. Будем искать такой пример в наиболее простом виде, считая, что одно из искомым чисел равно 1. Тогда оставшиеся два числа найдём из равенства $209 - a - b = ab$, которое приведем к виду $210 = (a+1)(b+1)$. Последнее уравнение даёт два примера, подходящие под условие задачи: (1, 9, 20) и (1, 13, 14). б) Количество чисел во второй группе меньше шести: действительно, в противном случае их произведение было бы не меньше $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720 > 210$. Пример из пяти чисел попробуем найти в виде набора (1, 2, 3, 4, x) с неизвестным x (от 5 до 20). Число x должно удовлетворять уравнению $210 - 10 - x = 24x$, т.е. $25x = 200$. Получаем решение $x = 8$, следовательно, набор (1, 2, 3, 4, 8) удовлетворяет условию задачи.