

Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки» по математике
Финальный тур 19.01.2025

Каждая из пяти задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 20 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов.

11 класс

- 11.1.** Решите уравнение $2\cos^4 x - \sin^3 x = 1$.
- 11.2.** Дан прямоугольный треугольник ABC (C – вершина прямого угла) с острым углом α при вершине A . Две окружности с центрами O_1 и O_2 проходят через вершины A, C и B, C , соответственно, и касаются прямой AB . Найдите отношение площадей треугольников ABC и O_1MO_2 , где M – середина гипотенузы AB .
- 11.3.** Для данного треугольника ABC с соответствующими сторонами a, b, c рассматривают уравнение $ax^4 + bx = c$. Докажите, что у этого уравнения ровно два корня, они разных знаков, причем отрицательный корень по модулю больше положительного.
- 11.4.** а) Определите количество положительных корней уравнения $9 \cdot x^{6x} = 1$; б) есть ли у этого уравнения отрицательные корни?
- 11.5.** Дан выпуклый n -угольник $A_1A_2 \dots A_n$ и точка M на плоскости. Пусть M_i – проекция M на прямую A_iA_{i+1} (где $A_{n+1} = A_1$). Докажите, что если выполняется равенство
- $$4(A_1M_1^2 + A_2M_2^2 + \dots + A_nM_n^2) = A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + \dots + A_nA_1^2,$$
- то около n -угольника можно описать окружность.