

Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки» по математике 2024-2025

10 класс

10.1. Существуют ли действительные числа x , y , которые удовлетворяют уравнению $3x^2 + 7y^2 + 1 = 9xy$?

Ответ. Не существуют. **Решение.** Если рассмотреть данное равенство как квадратное уравнение относительно неизвестного x , то его дискриминант равен $(9y)^2 - 12(7y^2 + 1) = -3y^2 - 12 < 0$ при всех y .

10.2. В турнире по футболу команды сыграли по одной игре друг с другом. В результате оказалось, что не было команды, проигравшей все матчи, и у всех команд разное количество очков. Докажите, что были команды, сыгравшие вничью. (В футболе за победу даётся 3 очка, за поражение 0 очков, за ничью 1 очко.)

Решение. Пусть в турнире участвовало n команд. Если предположить противное, т.е. отсутствие ничьих, то в результате у всех команд количество очков должно быть кратно трём. Таким образом, количество очков у каждой из n команд должно быть числом, кратным 3, от 3 до $3(n-1)$ (т.к. нуля очков у команды не может быть по условию задачи, а $3(n-1)$ очков может быть у команды, выигравшей все матчи). Количество таких чисел $(n-1)$, и по принципу Дирихле должны быть хотя бы две команды с одинаковым числом очков. Противоречие.

10.3. Докажите, что для любых целых n число $N = n^4 - 20n^2 - 21n - 20$ можно представить в виде произведения трех целых чисел, не равных ± 1 .

Решение. Разложим N на множители: $N = n^4 - n - 20(n^2 + n + 1) = n(n-1)(n^2 + n + 1) - 20(n^2 + n + 1) = (n^2 + n + 1)(n^2 - n - 20) = (n^2 + n + 1)(n-5)(n+4)$. Осталось убедиться, что N раскладывается на три множителя, отличные от ± 1 . Для этого надо проверить несколько случаев, когда указанные выше скобки в разложении N могут оказаться ± 1 . Первая скобка $(n^2 + n + 1)$ принимает только положительные значения (т.к. её дискриминант меньше нуля) и равна 1 только при $n = 0$ и $n = -1$. Тогда значения N равны, соответственно (-20) и (-18) , и каждое из этих двух чисел раскладывается на три множителя, не равные ± 1 . Вторая скобка равна ± 1 при $n = 6$ и $n = 4$. Тогда N равно, соответственно, 430 и (-168) , и каждое из этих чисел раскладывается на три множителя, не равные ± 1 . Наконец, третья скобка равна ± 1 при $n = -3$ и $n = -5$. Тогда N равно, соответственно (-56) и 210, и каждое из этих чисел раскладывается на три множителя, не равные ± 1 . *Комментарий.* Разложение N на множители можно было также получить, если заметить (и проверить), что данный многочлен четвертой степени имеет корни (-4) и 5 , а затем разделить его уголком на $(n-5)(n+4) = n^2 - n - 20$.

10.4. Внутри треугольника ABC площади 2024 отмечены 2024 точки. Докажите, что внутри ABC найдется треугольник площади 0,999, который подобен треугольнику ABC и не содержит ни одной отмеченной точки.

Решение. Разобьем каждую сторону треугольника ABC на 45 равных частей и через каждую из 44 точек деления на каждой стороне проведем по две прямые, параллельные сторонам треугольника. В результате треугольник ABC разобьется на $45^2 = 2025$ равных треугольников, подобных исходному. Т.к. $45^2 > 2024$, то среди треугольников разбиения найдется треугольник $A'B'C'$, внутри которого нет отмеченных точек. Поскольку площадь каждого треугольника разбиения равна $\frac{2024}{45^2} > 0,999$, то применив еще

гомотетию (подобие) с коэффициентом $45\sqrt{\frac{0,999}{2024}}$ с центром в центре масс треугольника

$A'B'C'$, получим внутри $A'B'C'$ искомый треугольник. *Комментарий.* Здесь при доказательстве мы воспользовались известным фактом о возможности разбиения (триангуляции) произвольного треугольника на n^2 подобных треугольников при делении сторон на n равных частей. Этот факт можно доказать по индукции: для $n = 2$ это стандартное разбиение средними линиями на 4 подобных треугольника, а при увеличении n на единицу к предыдущему разбиению добавляется еще один слой, состоящий из $(2n + 1)$ треугольника.

10 класс

10.1. Даны три числа a, b, c , удовлетворяющие неравенству $c^2 + ab < ca + cb$. Докажите, что $c^2 < a^2 + b^2$.

Решение. Неравенство перепишем в виде $(c - a)(c - b) < 0$. Значит, $a \neq b$, и число c лежит в интервале между a и b . Если a и b одного знака, и, для определенности, $|a| < |b|$, то $|c| < |b| \Rightarrow c^2 < b^2 < a^2 + b^2$. Если a и b разных знаков, то c совпадает по знаку с одним из этих чисел (при $c = 0$ утверждение очевидно); пусть, для определенности – совпадает с числом a . Тогда $c^2 < a^2 < a^2 + b^2$.

10.2. Для данного прямоугольного треугольника ABC с катетами a и b найдите размеры прямоугольника наибольшей площади, который лежит в треугольнике ABC так, что одна из его вершин совпадает с вершиной C прямого угла.

Ответ. $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$. **Решение.** Пусть a, b – длины катетов CA и CB , соответственно; x, y – стороны искомого прямоугольника. Введем систему координат: начало координат – в вершине C , ось x – вдоль CA , ось y – вдоль CB . Тогда гипотенуза лежит на прямой $y = b - \frac{b}{a}x$, а точка

$(x; y)$ лежит на прямой, проходящей через точки $(0; b)$ и $(a; 0)$, т.е. на прямой $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Требуется при этом условии найти наибольшее значение площади $S = xy$. Имеем

$$S = xy = ab \cdot \left(\frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} \right) \leq ab \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 = \frac{ab}{4}.$$

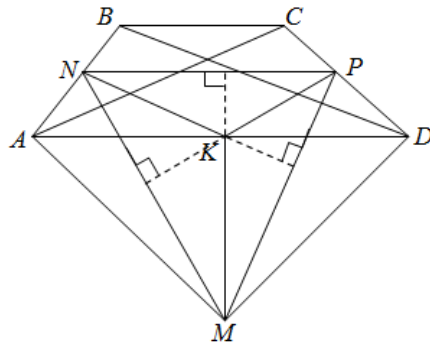
Здесь мы воспользовались неравенством между средним геометрическим и средним арифметическим; при этом равенство (наибольшее значение) достигается при $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{1}{2}$. *Замечание.* Другой способ вычисления

наибольшего значения получается при нахождении вершины параболы $S(x) = x \left(b - \frac{bx}{a} \right)$.

10.3. Дана трапеция $ABCD$ и точка M вне трапеции, по другую сторону от основания AD . Через точку M проведены прямые, перпендикулярные диагоналям трапеции AC и BD . Оказалось, что эти прямые проходят через середины боковых сторон AB и CD . Докажите, что $AM = DM$.

Решение. Обозначим середины сторон трапеции: N – середина AB , P – середина CD , K – середина AD . По свойству средних линий $NP \parallel AD$, $NK \parallel BD$, $KP \parallel AC$. Рассмотрим треугольник KPN . Высота, проведенная из вершины P к стороне NK , лежит на прямой PM в силу параллельности $NK \parallel BD$. Аналогично, высота из вершины N к стороне PK лежит на прямой NM . Значит, точка M – ортоцентр (точка пересечения высот) $\triangle KPN$. Следовательно, высота из вершины K к стороне NP лежит на прямой MK , то есть $MK \perp NP$. Таким образом,

MK – одновременно высота и медиана треугольника AMD . Значит, $\triangle AMD$ – равнобедренный, $AM = DM$.



10.4. В ряд выложены 10 белых и 10 черных шашек так, что их цвета чередуются (слева направо): белая, черная, белая, черная, ..., белая, черная. За один ход можно поменять местами соседние шашки в любой разноцветной паре, при условии, что черная шашка стоит справа от белой. Какое наибольшее число ходов может быть сделано в этом процессе?

Ответ. 55. Решение. Рассмотрим номера по порядку (слева направо) всех черных шашек. Вначале это были все чётные числа 2, 4, 6, ..., 20. На каждом шаге номер одной из черных шашек уменьшается на единицу, и пока номера черных шашек не станут равны 1, 2, 3, ..., 10 (когда все черные шашки будут слева от всех белых), процесс можно продолжать, т.к. найдется белая шашка слева от черной. Сумма номеров черных шашек сначала была равна $(2 + 4 + \dots + 20) = 110$, а в конце $(1 + 2 + \dots + 10) = 55$. Значит, она уменьшится на 55. Поскольку эта сумма на каждом шаге уменьшается на 1, весь процесс займет 55 шагов.