

Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки» по математике 2024-2025

11 класс

11.1. Существуют ли действительные числа x, y , которые удовлетворяют уравнению $3x^2 + 7y^2 + 1 = 9xy$?

Ответ. Не существуют. **Решение.** Если рассмотреть данное равенство как квадратное уравнение относительно неизвестного x , то его дискриминант равен $(9y)^2 - 12(7y^2 + 1) = -3y^2 - 12 < 0$ при всех y .

11.2. Найдите все действительные x , для которых оба числа $(\operatorname{tg} x + \sqrt{3})$ и $(\operatorname{ctg} x + \sqrt{3}/3)$ являются рациональными.

Ответ. $-\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **Решение.** Пусть $\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = p$, где p – рациональное число. Тогда

$$\operatorname{ctg} x + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg} x}{\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{p}{\sqrt{3}p - 3}, \text{ и при } p \neq 0 \text{ это число иррациональное, что}$$

противоречит условию. Значит, $p = 0$ и тогда $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$, $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. В этом

случае $\operatorname{ctg} x + \frac{\sqrt{3}}{3} = 0$.

11.3. Найдите все натуральные числа n , для которых оба числа $\sqrt{n}$ и $\sqrt{n+2024}$ целые.

Ответ. 1, 35^2 , 251^2 , 505^2 . **Решение.** Из условия задачи следует, что: $\sqrt{n+2024} = \sqrt{n} + k$, где k – натуральное число. Возведя в квадрат это выражение, будем иметь: $2024 = k(k + 2\sqrt{n})$. Из данного равенства и разложения 2024 на простые множители $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ следует, что k не может быть нечетным. Отсюда также следует, что k не делится на 8 (иначе правая часть в этом равенстве делилась бы на 16). Таким образом, могут быть два случая: либо $k = 2(2m+1)$, либо $k = 4(2m+1)$, где $(2m+1)$ – некоторое нечетное число. В первом случае $k = 2$ или $k = 2 \cdot 11 = 22$, т.к. при значениях $k \geq 2 \cdot 23 = 46$ второй множитель (т.е. $k + 2\sqrt{n}$) меньше 44. Во втором случае $k = 4$ или $k = 4 \cdot 11 = 44$ (других значений не может быть в силу тех же сравнений со вторым множителем). Итак, всего есть четыре значения k – это 2, 4, 22 и 44. Им соответствуют значения n из выражения $k + 2\sqrt{n} = 2024/k$, а именно 505^2 , 251^2 , 35^2 и 1.

2-й способ решения. Так как $\sqrt{n}$ и $\sqrt{n+2024}$ целые, то $n = k^2$, $n + 2024 = p^2$, где k и p натуральные. Тогда $k^2 + 2024 = p^2$, откуда $(p-k)(p+k) = 2024$. Из разложения на простые множители $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ следует, что 2024 имеет 16 натуральных делителей, и поэтому решение уравнения $(p-k)(p+k) = 2024$ в натуральных числах (где первый множитель меньше второго) сводится к решению восьми систем:

$$\begin{aligned} 1) \begin{cases} p-k=1, \\ p+k=2024; \end{cases} & 2) \begin{cases} p-k=2, \\ p+k=1012; \end{cases} & 3) \begin{cases} p-k=4, \\ p+k=506; \end{cases} & 4) \begin{cases} p-k=8, \\ p+k=253; \end{cases} & 5) \begin{cases} p-k=11, \\ p+k=184; \end{cases} \\ 6) \begin{cases} p-k=22, \\ p+k=92; \end{cases} & 7) \begin{cases} p-k=23, \\ p+k=88; \end{cases} & 8) \begin{cases} p-k=44, \\ p+k=46. \end{cases} \end{aligned}$$

Для решения каждой из этих систем в целых числах необходимо (и достаточно), чтобы правые части были одинаковой четности, поэтому системы 1), 4), 5) и 7) не имеют целочисленных решений. Решения остальных четырех систем дают четыре различных значения k – это 505, 251, 35 и 1. Им соответствуют значения $n = k^2$, а именно 505^2 , 251^2 , 35^2 и 1.

11.4. Внутри треугольника ABC площади 2024 отмечены 2024 точки. Докажите, что внутри ABC найдется треугольник площади 0,999, который подобен треугольнику ABC и не содержит ни одной отмеченной точки.

Решение. Разобьем каждую сторону треугольника ABC на 45 равных частей и через каждую из 44 точек деления на каждой стороне проведем по две прямые, параллельные сторонам треугольника. В результате треугольник ABC разобьется на $45^2 = 2025$ равных треугольников, подобных исходному. Т.к. $45^2 > 2024$, то среди треугольников разбиения найдется треугольник $A'B'C'$, внутри которого нет отмеченных точек. Поскольку площадь каждого треугольника разбиения равна $\frac{2024}{45^2} > 0,999$, то применив еще

гомотетию (подобие) с коэффициентом $45\sqrt{\frac{0,999}{2024}}$ с центром в центре масс треугольника

$A'B'C'$, получим внутри $A'B'C'$ искомый треугольник. *Комментарий.* Здесь при доказательстве мы воспользовались известным фактом о возможности разбиения (триангуляции) произвольного треугольника на n^2 подобных треугольников при делении сторон на n равных частей. Этот факт можно доказать по индукции: для $n = 2$ это стандартное разбиение средними линиями на 4 подобных треугольника, а при увеличении n на единицу к предыдущему разбиению добавляется еще один слой, состоящий из $(2n + 1)$ треугольника.

11 класс

11.1. Даны три числа a, b, c , удовлетворяющие неравенству $c^2 + ab < ca + cb$. Докажите, что $c^2 < a^2 + b^2$.

Решение. Неравенство перепишем в виде $(c - a)(c - b) < 0$. Значит, $a \neq b$, и число c лежит в интервале между a и b . Если a и b одного знака, и, для определенности, $|a| < |b|$, то $|c| < |b| \Rightarrow c^2 < b^2 < a^2 + b^2$. Если a и b разных знаков, то c совпадает по знаку с одним из этих чисел (при $c = 0$ утверждение очевидно); пусть, для определенности – совпадает с числом a . Тогда $c^2 < a^2 < a^2 + b^2$.

11.2. Найдите все действительные x , для которых оба числа: $\cos x$ и $(\sin x + \sqrt{3}/2)$ являются рациональными.

Ответ. $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **Решение.** Пусть $\sin x + \sqrt{3}/2 = p$, где p – рациональное

число. Тогда $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(p - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - p^2 + \sqrt{3}p - \frac{3}{4}$, и при $p \neq 0$ это число

иррациональное, что противоречит условию. Значит, $p = 0$, и тогда $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, т.е. либо

$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, либо $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Для первой серии корней $\cos x = 0,5$; для второй серии $\cos x = -0,5$, и таким образом, условия рациональности выполнены.

11.3. Докажите, что из любых шести целых чисел можно выбрать четыре и обозначить их a, b, c, d так, чтобы число $ab^2 - cd^2$ делилось на 5.

Решение. Сначала из данных шести чисел выберем два, имеющие одинаковые остатки при делении на 5 (это возможно, т.к. остатков всего пять). Обозначим выбранные числа как a и c . Из оставшихся четырех чисел надо выбрать еще два числа, b и d , квадраты которых

имеют одинаковые остатки при делении на 5. Это возможно, поскольку квадраты целых чисел имеют только три различных остатка (mod 5), а именно 0, 1 и 4.

- 11.4.** Дан тетраэдр $ABCD$ и произвольная точка M в пространстве. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 симметричны точке M относительно точек пересечения медиан соответствующих граней. Докажите, что отношение объемов $V_{A_1B_1C_1D_1}/V_{ABCD}$ постоянно для всех тетраэдров и любой точки M и найдите это отношение.

Ответ: $\frac{8}{27}$. **Решение.** Введем векторы $\mathbf{a} = \overrightarrow{MA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{MB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{MC}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{MD}$. Тогда $\overrightarrow{MA_2} = (\mathbf{d} + \mathbf{b} + \mathbf{c})/3$, $\overrightarrow{MB_2} = (\mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{d})/3$, $\overrightarrow{MC_2} = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{d})/3$, $\overrightarrow{MD_2} = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})/3$, где A_2, B_2, C_2, D_2 – точки пересечения медиан граней BCD, ACD, ABD и ABC соответственно. Поскольку $\overrightarrow{MA_1} = 2\overrightarrow{MA_2}$, $\overrightarrow{MB_1} = 2\overrightarrow{MB_2}$, $\overrightarrow{MC_1} = 2\overrightarrow{MC_2}$, $\overrightarrow{MD_1} = 2\overrightarrow{MD_2}$, то $\overrightarrow{A_1B_1} = \frac{2}{3}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$, и, аналогично, остальные векторы ребер тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$ коллинеарны векторам ребер тетраэдра $ABCD$ с коэффициентом $\frac{2}{3}$, а значит, тетраэдры подобны и отношение их объемов равно $\left(\frac{2}{3}\right)^3$.