

1 тур

Общие критерии оценивания

Каждая из четырех задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 25 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов. Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

09.11.2024

7 класс

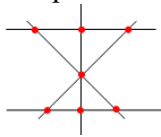
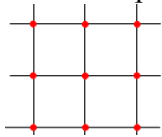
7.1. Петя и Маша – брат и сестра, они ходят в одну и ту же школу. Петя выходит из дома в 8:05 и приходит в школу в 8:45. Маша выходит на 5 минут раньше брата, идет по той же дороге и приходит в школу на 15 минут позже него. Через сколько минут после выхода Маши из дома её догонит Петя?

Ответ. 15 минут. **Решение.** Пусть v (м/мин) – скорость Маши, u (м/мин) – скорость Пети. Тогда расстояние до школы равно, по условиям задачи, $40u = 60v$. Таким образом, $u = (3/2)v$. Пусть t (min) – искомое время, за которое после выхода Маши из дома её догонит Петя. Тогда $vt = u(t - 5)$. Учитывая, что $u = (3/2)v$, получаем уравнение $2t = 3(t - 5)$. Отсюда $t = 15$.

7.2. Дана правильная несократимая дробь. Если числитель возвести в квадрат, а к знаменателю прибавить 5, то получится дробь, которая в 3 раза больше исходной. Чему равна исходная дробь?

Ответ. $\frac{4}{15}$. **Решение.** Пусть $\frac{x}{y}$ – правильная несократимая дробь, $0 < x < y$. Тогда $\frac{x^2}{y+5} = \frac{3x}{y}$. Отсюда $x^2y = 3x(y+5)$. Сокращая на $x \neq 0$ и вынося y за скобку, получим $y(x-3) = 15$. Так как $0 < x < y$ и x, y – целые, то возможны два случая: 1) $y = 5$, $x - 3 = 3$, но $x = 6$ не удовлетворяет условию $x < y$; и 2) второй случай: $y = 15$, $x - 3 = 1$. В этом случае $x = 4$ и дробь $4/15$ – правильная и несократимая.

7.3. Вова начертил n отрезков и отметил красным цветом все точки их пересечения. Могло ли оказаться так, что на любом отрезке ровно три красных точки, если а) $n = 11$; б) $n = 100$?



Ответ. а) могло; б) могло. **Решение.** а) См. пример на рисунке. Набор отрезков в этом примере состоит из двух частей: в левой части 6 отрезков, в правой – 5. б) Если расположить 20 копий правой части примера из пункта а), получим искомое расположение 100 отрезков.

7.4. У Васи 100 спичек. Сколькими способами он может, используя все спички и не ломая их, составить квадрат и (отдельно) равносторонний треугольник? (Разные способы отличаются размерами квадрата и треугольника).

Ответ. 8. **Решение.** Пусть x (спичек) – длина стороны квадрата, y (спичек) – длина стороны треугольника. Тогда $4x + 3y = 100 \Leftrightarrow 3y = 4(25 - x)$. Таким образом, для делимости на 3 нужно рассмотреть в качестве x все натуральные числа до 25, дающие остаток 1 при делении на 3 (т.е. тот же остаток, что у числа 25). Есть 8 таких чисел, а именно числа вида $1 + 3k$, $k = 0, 1, \dots, 7$ (само число 25 при $k = 8$ рассматривать не следует, т.к. иначе значение $y = 0$, т.е. будет составлен только квадрат, без треугольника). Тогда соответствующее значение y равно $4 \cdot (8 - k)$.

10.11.2024

7 класс

7.1. Имеются три квадрата. Сторона второго квадрата на 20% больше стороны первого, а сторона третьего квадрата на 17% меньше стороны второго. Площадь какого квадрата больше: первого или третьего, и на сколько процентов?

Ответ. Площадь первого квадрата больше площади третьего на $\frac{49900}{62001} \% \approx 0,8\%$. **Решение.**

Пусть сторона первого квадрата равна a , тогда сторона второго квадрата равна $1,2a$, а сторона третьего квадрата – $0,83 \cdot 1,2a = 0,996a$. Значит, площадь первого квадрата больше

площади третьего на $\frac{1 - 0,996^2}{0,996^2} \cdot 100\% = \frac{49900}{62001} \% \approx 0,8\%$.

7.2. Коля записал на доску подряд все натуральные числа от 1 до n . Затем он подсчитал количество всех цифр на доске. У него получилось 2024. Не ошибся ли Коля?

Ответ. Ошибся. **Решение.** Если выписано 2024 цифры, то n должно быть трехзначным числом: действительно, в случае двузначного n было бы выписано не более $9 + 2 \cdot 90 = 189$ цифр, а в случае четырехзначного (или более) – было бы выписано более $9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 = 2889$ цифр. Пусть k – количество выписанных трехзначных чисел ($k = n - 99$). Тогда общее количество выписанных цифр равно $9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot k = 2024$. Поэтому число k – нецелое (для этого необязательно находить его из данного уравнения, т.к. левая часть делится на 3, а правая – нет).

7.3. Сколько существует шестизначных натуральных чисел, кратных 25, у которых все соседние цифры разной четности?

Ответ. 1125. **Решение.** Последними двумя цифрами разной четности могут быть (в силу делимости на 25) либо 25, либо 50. Первой цифрой (слева) может быть любая из девяти цифр (т.к. 0 не может быть первой цифрой). После её выбора, второй цифрой может быть любая из пяти цифр, имеющая четность, отличную от четности первой цифры. И так далее, до четвертой цифры слева (цифры сотен) будем иметь возможность выбора из пяти цифр. Когда цифра сотен выбрана, четность цифры десятков будет однозначно определена, и тем самым, будет однозначно определены две последние цифры (это будет 25, если цифра сотен была нечетной, либо 50 в случае четной цифры сотен). Таким образом, по правилу произведения количество искомых чисел равно $9 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 1125$.

7.4. Из мешочка лото, в котором вначале лежат 90 бочонков с числами от 1 до 90, достают наугад n бочонков. При каком наименьшем n среди вынутых бочонков наверняка окажется бочонок с числом, кратным 5 или 7 (или 5 и 7 одновременно)?

Ответ. 63. **Решение.** Будем называть *желательными* числа, делящиеся на 5 или на 7. Количество чисел от 1 до 90, кратных 5, равно $18 = 90:5$, а кратных 7 – равно $12 = [90:7]$ (скобки $[]$ обозначают целую часть). Если сложить $18 + 12 = 30$, то при этом будут учтены по одному разу все числа, делящиеся только на 5 и только на 7, но дважды будут учтены числа, делящиеся одновременно на 5 и на 7, т.е. кратные 35. Количество таких (дважды учтенных чисел) равно $2 = [90:35]$. Поэтому, вычитая $30 - 2$, получим 28 желательных чисел. Остальные 62 нежелательных числа ($= 90 - 28$) могли оказаться на вынутых сначала бочонках, но тогда 63-й вынутый бочонок гарантированно будет желательным.