

Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки» по математике 2024-2025

8 класс

8.1. Петя и Маша – брат и сестра, они ходят в одну и ту же школу. Петя выходит из дома в 8:05 и приходит в школу в 8:45. Маша выходит на 5 минут раньше брата, идет по той же дороге и приходит в школу на 15 минут позже него. Через сколько минут после выхода Маши из дома её догонит Петя?

Ответ. 15 минут. **Решение.** Пусть v (м/мин) – скорость Маши, u (м/мин) – скорость Пети. Тогда расстояние до школы равно, по условиям задачи, $40u = 60v$. Таким образом, $u = (3/2)v$. Пусть t (мин) – искомое время, за которое после выхода Маши из дома её догонит Петя. Тогда $vt = u(t - 5)$. Учитывая, что $u = (3/2)v$, получаем уравнение $2t = 3(t - 5)$. Отсюда $t = 15$.

8.2. Коля умножил 2024 на пятизначное натуральное число и получил куб некоторого натурального числа. Найдите это пятизначное число.

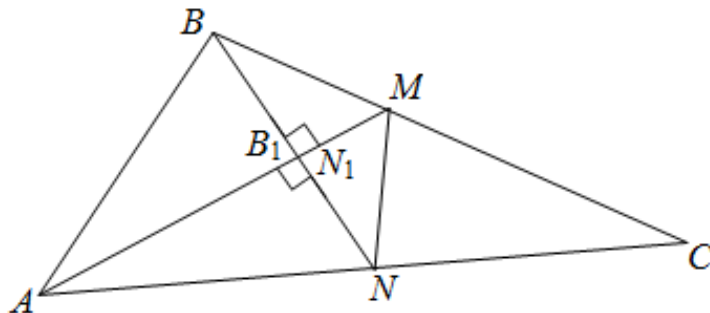
Ответ. 64009. **Решение.** Пусть x – искомое пятизначное число. Так как $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$, а $2024x = n^3$, то $x = 11^2 \cdot 23^2 \cdot m^3 = 64009 \cdot m^3$, где m – натуральное. Если $m \geq 2$, то $x \geq 512072$.

8.3. Докажите, что $N = n^4 - 20n^2 - 21n - 20$ является составным натуральным числом для любых натуральных $n > 5$.

Решение. Тот факт, что N – составное натуральное число, следует из его чётности в случае, когда $N > 2$, а чётность следует из того, что числа n^4 и $21n$ одинаковой чётности. Далее, при $n \geq 5$ имеем: $N = n^2 \left(n^2 - 20 - \frac{21}{n} - \frac{20}{n^2} \right) \geq 25 \cdot (25 - 20 - 21/5 - 20/25) = 0$, и из данного выражения для N следует, что большему значению n при $n > 5$ соответствует большее значение N . Проверка значения N при $n = 6$ дает $N = 430 > 2$. *Комментарий.* Как доказано при решении задачи 9.4, $N = (n^2 + n + 1)(n - 5)(n + 4)$, откуда сразу следует решение 8.3.

8.4. Найдите угол между биссектрисой AM и медианой BN треугольника ABC , если известно, что площади треугольников ABM и MNC равны.

Ответ. 90° . **Решение.** Поскольку $S_{AMN} = S_{MNC}$ (т.к. $AN = NC$), из условия задачи имеем $S_{ABM} = S_{ANM}$. Поэтому в треугольниках ABM и ANM высоты, проведенные из вершин B и N на сторону AM , равны. Пусть B_1 и N_1 – основания этих высот. Тогда прямоугольные треугольники ABB_1 и ANN_1 равны, т.к. $BB_1 = NN_1$ и $\angle BAB_1 = \angle NAN_1$. Следовательно, $AB_1 = AN_1$ и поэтому точки B_1 и N_1 совпадают, а значит, они совпадают с точкой пересечения AM и BN .



8 класс

8.1. Имеются три квадрата. Сторона второго квадрата на 20% больше стороны первого, а сторона третьего квадрата на 17% меньше стороны второго. Площадь какого квадрата больше: первого или третьего, и на сколько процентов?

Ответ. Площадь первого квадрата больше площади третьего на $\frac{49900}{62001} \% \approx 0,8\%$. **Решение.**

Ответ. Площадь первого квадрата больше площади третьего на $\frac{49900}{62001} \% \approx 0,8\%$.

Решение. Пусть сторона первого квадрата равна a , тогда сторона второго квадрата равна $1,2a$, а сторона третьего квадрата – $0,83 \cdot 1,2a = 0,996a$. Значит, площадь первого

квадрата больше площади третьего на $\frac{1 - 0,996^2}{0,996^2} \cdot 100\% = \frac{49900}{62001} \% \approx 0,8\%$.

8.2. Дан треугольник ABC и произвольная точка M на плоскости. Точки A_1, B_1, C_1 симметричны точке M относительно середин сторон BC, AC и AB , соответственно. Докажите, что $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$.

Решение. Обозначим через A_2, B_2, C_2 середины сторон BC, AC и AB соответственно. Тогда отрезок A_2B_2 является средней линией и в треугольнике ABC , и в треугольнике A_1B_1M . Поэтому $AB = 2A_2B_2 = A_1B_1$. Аналогично $BC = B_1C_1$ и $AC = A_1C_1$. Таким образом, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по третьему признаку равенства треугольников.

8.3. Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 4, с суммой цифр 2024.

Ответ. 199...988 (223 девятки после единицы перед двумя восьмерками). **Решение.**

Докажем, что число в ответе наименьшее. Если в искомом числе было бы меньше 226 цифр, то сумма цифр не превосходила бы $224 \cdot 9 + 8 = 2024$ (последняя цифра не может быть девяткой из-за четности числа). При этом, если последняя цифра 6 или меньше, то сумма цифр не больше 2022, а если последняя цифра 8, то предпоследняя не может быть девяткой из-за делимости на 4, и в этом случае сумма цифр – не больше 2023. Итак, в искомом числе не меньше 226 цифр. Найдём наименьшее 226-значное число. Его самая маленькая (возможная) первая цифра – единица. Последняя цифра не может быть девяткой из-за четности числа. Если бы одна из следующих за единицей 223 цифр была бы меньше 9, то сумма последних двух цифр была бы не меньше 17, но как проверено выше, из-за делимости на 4 такого быть не может. Тогда сумма последних двух цифр равна 16, и в этом случае только 88 подходит

8.4. Из мешочка лото, в котором вначале лежат 90 бочонков с числами от 1 до 90, достают наугад n бочонков. При каком наименьшем n среди вынутых бочонков наверняка окажется бочонок с числом, кратным 5 или 7 (или 5 и 7 одновременно)?

Ответ. 63. **Решение.** Будем называть *желательными* числа, делящиеся на 5 или на 7. Количество чисел от 1 до 90, кратных 5, равно $18 = 90:5$, а кратных 7 – равно $12 = [90:7]$ (скобки $[]$ обозначают целую часть). Если сложить $18 + 12 = 30$, то при этом будут учтены по одному разу все числа, делящиеся только на 5 и только на 7, но дважды будут учтены числа, делящиеся одновременно на 5 и на 7, т.е. кратные 35. Количество таких (дважды учтенных чисел) равно $2 = [90:35]$. Поэтому, вычитая $30 - 2$, получим 28 желательных чисел. Остальные 62 нежелательных числа ($= 90 - 28$) могли оказаться на вынутых сначала бочонках, но тогда 63-й вынутый бочонок гарантированно будет желательным.