

Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки» по математике 2024-2025

9.1. Коля умножил 2024 на пятизначное натуральное число и получил куб некоторого натурального числа. Найдите это пятизначное число.

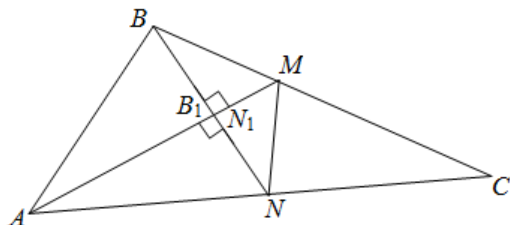
Ответ. 64009. **Решение.** Пусть x – искомое пятизначное число. Так как $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$, а $2024x = n^3$, то $x = 11^2 \cdot 23^2 \cdot m^3 = 64009 \cdot m^3$, где m – натуральное. Если $m \geq 2$, то $x \geq 512072$.

9.2. В турнире по футболу команды сыграли по одной игре друг с другом. В результате оказалось, что не было команды, проигравшей все матчи, и у всех команд разное количество очков. Докажите, что были команды, сыгравшие вничью. (В футболе за победу даётся 3 очка, за поражение 0 очков, за ничью 1 очко.)

Решение. Пусть в турнире участвовало n команд. Если предположить противное, т.е. отсутствие ничьих, то в результате у всех команд количество очков должно быть кратно трём. Таким образом, количество очков у каждой из n команд должно быть числом, кратным 3, от 3 до $3(n-1)$ (т.к. нуля очков у команды не может быть по условию задачи, а $3(n-1)$ очков может быть у команды, выигравшей все матчи). Количество таких чисел $(n-1)$, и по принципу Дирихле должны быть хотя бы две команды с одинаковым числом очков. Противоречие.

9.3. Найдите угол между биссектрисой AM и медианой BN треугольника ABC , если известно, что площади треугольников ABM и MNC равны.

Ответ. 90° . **Решение.** Поскольку $S_{AMN} = S_{MNC}$ (т.к. $AN = NC$), из условия задачи имеем $S_{ABM} = S_{ANM}$. Поэтому в треугольниках ABM и ANM высоты, проведенные из вершин B и N на сторону AM , равны. Пусть B_1 и N_1 – основания этих высот. Тогда прямоугольные треугольники ABB_1 и ANN_1 равны, т.к. $BB_1 = NN_1$ и $\angle BAB_1 = \angle NAN_1$. Следовательно, $AB_1 = AN_1$ и поэтому точки B_1 и N_1 совпадают, а значит, они совпадают с точкой пересечения AM и BN .



9.4. Докажите, что для любых целых n число $N = n^4 - 20n^2 - 21n - 20$ можно представить в виде произведения трех целых чисел, не равных ± 1 .

Решение. Разложим N на множители: $N = n^4 - n - 20(n^2 + n + 1) = (n^2 + n + 1)(n^2 - n - 20) = (n^2 + n + 1)(n - 5)(n + 4)$. Осталось убедиться, что N раскладывается на три множителя, отличные от ± 1 . Для этого надо проверить несколько случаев, когда указанные выше скобки в разложении N могут оказаться ± 1 . Первая скобка $(n^2 + n + 1)$ принимает только положительные значения (т.к. её дискриминант меньше нуля) и равна 1 только при $n = 0$ и $n = -1$. Тогда значения N равны, соответственно (-20) и (-18) , и каждое из этих двух чисел раскладывается на три множителя, не равные ± 1 . Вторая скобка равна ± 1 при $n = 6$ и $n = 4$. Тогда N равно, соответственно, 430 и (-168) , и каждое из этих чисел раскладывается на три множителя, не равные ± 1 . Наконец, третья скобка равна ± 1 при $n = -3$ и $n = -5$. Тогда N равно, соответственно (-56) и 210, и каждое из этих чисел раскладывается на три множителя, не равные ± 1 . **Комментарий.** Разложение N на множители можно было также получить, если заметить (и проверить), что данный многочлен четвертой степени имеет корни (-4) и 5 , а затем разделить его уголком на $(n - 5)(n + 4) = n^2 - n - 20$.

9 класс

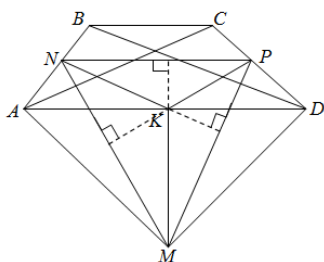
9.1. Длины a , b , c сторон треугольника удовлетворяют неравенству $c^2 + ab < ca + cb$. Каким является угол, лежащий против стороны c : острым, тупым или прямым?

Ответ. Острым. **Решение.** Неравенство перепишем в виде $(c - a)(c - b) < 0$. Значит, $a \neq b$, и число c лежит в интервале между a и b . Если бы против стороны c лежал прямой или тупой угол, то длина c была бы наибольшей. Значит, угол, лежащий против стороны c , острый.

9.2. Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 4, с суммой цифр 2024.

Ответ. 199...988 (223 девятки после единицы перед двумя восьмерками). **Решение.** Докажем, что число в ответе наименьшее. Если в искомом числе было бы меньше 226 цифр, то сумма цифр не превосходила бы $224 \cdot 9 + 8 = 2024$ (последняя цифра не может быть девяткой из-за четности числа). При этом, если последняя цифра 6 или меньше, то сумма цифр не больше 2022, а если последняя цифра 8, то предпоследняя не может быть девяткой из-за делимости на 4, и в этом случае сумма цифр – не больше 2023. Итак, в искомом числе не меньше 226 цифр. Найдём наименьшее 226-значное число. Его самая маленькая (возможная) первая цифра – единица. Последняя цифра не может быть девяткой из-за четности числа. Если бы одна из следующих за единицей 223 цифр была бы меньше 9, то сумма последних двух цифр была бы не меньше 17, но как проверено выше, из-за делимости на 4 такого быть не может. Тогда сумма последних двух цифр равна 16, и в этом случае только 88 подходит

9.3. Дана трапеция $ABCD$ и точка M вне трапеции, по другую сторону от основания AD . Через точку M проведены прямые, перпендикулярные диагоналям трапеции AC и BD . Оказалось, что эти прямые проходят через середины боковых сторон AB и CD . Докажите, что $AM = DM$.



Решение. Обозначим середины сторон трапеции: N – середина AB , P – середина CD , K – середина AD . По свойству средних линий $NP \parallel AD$, $NK \parallel BD$, $KP \parallel AC$. Рассмотрим треугольник KPN . Высота, проведенная из вершины P к стороне NK , лежит на прямой PM в силу параллельности $NK \parallel BD$. Аналогично,

высота из вершины N к стороне PK лежит на прямой NM . Значит, точка M – ортоцентр (точка пересечения высот) $\triangle KPN$. Следовательно, высота из вершины K к стороне NP лежит на прямой MK , то есть $MK \perp NP$. Таким образом, MK – одновременно высота и медиана треугольника AMD . Значит, $\triangle AMD$ – равнобедренный, $AM = DM$.

9.4. В ряд выложены 10 белых и 10 черных шашек так, что их цвета чередуются (слева направо): белая, черная, белая, черная, ..., белая, черная. За один ход можно поменять местами соседние шашки в одной (любой) разноцветной паре, при условии, что черная шашка стоит справа от белой. Какое наибольшее число ходов может быть сделано в этом процессе?

Ответ. 55. **Решение.** Рассмотрим номера по порядку (слева направо) всех черных шашек. Вначале это были все чётные числа 2, 4, 6, ..., 20. На каждом шаге номер одной из черных шашек уменьшается на единицу, и пока номера черных шашек не станут равны 1, 2, 3, ..., 10 (когда все черные шашки будут слева от всех белых), процесс можно продолжать, т.к. найдется белая шашка слева от черной. Сумма номеров черных шашек сначала была равна $(2 + 4 + \dots + 20) = 110$, а в конце $(1 + 2 + \dots + 10) = 55$. Значит, она уменьшится на 55. Поскольку эта сумма на каждом шаге уменьшается на 1, весь процесс займет 55 шагов.