

**Межрегиональная олимпиада школьников «Будущие исследователи – будущее науки»
Математика, финальный тур, 2025-2026 уч.г.**

10 класс

10.1. Дано сто чисел: $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{100}$. Вычислим 98 разностей (через одно число): $a_1 = \sqrt{3} - 1$, $a_2 = \sqrt{4} - \sqrt{2}$, ..., $a_{98} = \sqrt{100} - \sqrt{98}$. Докажите, что $17,5 < a_1 + a_2 + \dots + a_{98} < 17,6$.

Решение. $a_1 + a_2 + \dots + a_{98} = \sqrt{3} - 1 + \sqrt{4} - \sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{98} - \sqrt{96} + \sqrt{99} - \sqrt{97} + \sqrt{100} - \sqrt{98} =$
 $= \sqrt{100} + \sqrt{99} - \sqrt{2} - 1 = 9 + \sqrt{99} - \sqrt{2}$. В силу того, что $9,94^2 = 98,8036 < 99 < 99,0025 = 9,95^2$ и $1,41^2 = 1,9881 < 2 < 2,0164 = 1,42^2$, получаем следующие оценки $17,52 = 9 + 9,94 - 1,42 < 9 + \sqrt{99} - \sqrt{2} < 9 + 9,95 - 1,41 = 17,54$. Значит, $17,5 < a_1 + a_2 + \dots + a_{98} < 17,6$.

Комментарий. Здесь для получения оценки сверху достаточно неравенств $\sqrt{99} < 10$ и $\sqrt{2} > 1,4$, т.е. с точностью до десятых, а для оценки снизу надо оценивать квадратные корни с точностью до сотых: $\sqrt{99} > 9,94$ и $\sqrt{2} < 1,42$. Использование вместо строгих неравенств приближенных равенств $\approx$ для корней без уточнения погрешностей при оценке результата считается грубой ошибкой.

10.2. Существуют ли рациональные, но не целые, числа x, y , для которых **а)** числа $2x^2 + y^2$ и $x^2 - 4y^2$ ненулевые целые; **б)** числа $2x^2 + y^2$ и $3x^2 - 4y^2$ целые?

Ответ: **а)** существуют; **б)** не существуют. **Решение.** **а)** пусть $2x^2 + y^2 = m$, $x^2 - 4y^2 = n$, где m, n – ненулевые целые числа. Решая эту систему, найдем $9x^2 = 4m + n$; $9y^2 = m - 2n$. Поэтому $x = x_1/3, y = y_1/3$, где x_1, y_1 – целые числа, не кратные трём. Тогда оба числа $2x_1^2 + y_1^2$ и $x_1^2 - 4y_1^2$ должны делиться на 9 (и не равняться 0). Положив, например, $x_1 = 7, y_1 = 1$, получим $x = 7/3, y = 1/3$; здесь x_1, y_1 выбраны с учетом возможных остатков квадратов чисел при делении на 9, а именно, ненулевые остатки могут быть только 1, 4 и 7. (Если взять $x_1 = 1, y_1 = 4$, получим другой пример $x = 1/3, y = 4/3$, и т.п.) **б)** Решая вторую систему, получим, аналогично, что $11x^2$ – число целое. Если предположить противное, то $x = p/q$, где p и q – взаимно простые целые числа, $q > 1$. Но отсюда следует, что 11 делится на q^2 , а это возможно лишь при $q = 1$. *Комментарий.* Данные соотношения как системы двух уравнений с двумя неизвестными x^2 и y^2 для пунктов а) и б) отличаются тем, что у первой системы определитель равен 9, т.е. точному квадрату, и мы смогли привести пример искомого решения. Для второй системы определитель равен 11, и рациональных, но не целых, решений не существует. Для полного решения пункта а) необязательно приводить рассуждения, подобные выше изложенным: достаточно привести конкретный пример.

10.3. Дан треугольник ABC площади S с острыми углами A и C . Для текущей точки M на стороне AC рассматриваются точки M_1 и M_2 – центры окружностей, описанных около треугольников ABM и CBM . Чему равно наименьшее значение площади треугольника M_1MM_2 ?

Ответ: $S/4$. **Решение.** В силу подобия треугольников M_1MM_2 и ABC (см. задачу 9.4) наименьшее значение площади треугольника M_1MM_2 будет при наименьшем значении коэффициента подобия, который равен $1/2$, когда точка M является основанием высоты треугольника ABC , опущенной из вершины B . Поэтому наименьшее значение площади треугольника M_1MM_2 равно $(1/2)^2 \cdot S$.

10.4 Круг разбит на 125 секторов, занумерованных по часовой стрелке последовательными числами от 1 до 125 (начиная с некоторого сектора). Вначале в одном из секторов сидит кузнечик. Затем он прыгает, перемещаясь каждый раз по кругу на количество секторов по часовой стрелке, равное номеру текущего сектора. **а)** Докажите, что существует по меньшей мере 25 секторов, в которых кузнечик не сможет побывать. **б)** Какое наибольшее количество секторов он может посетить?

Ответ: б) 100. Решение. а) Пусть вначале кузнечик сидел в секторе под номером x . Тогда после одного прыжка он будет в секторе $x + x = 2x$, после двух прыжков – в секторе $4x$, и т.д.: после n прыжков – в секторе $2^n \cdot x$, где все номера секторов берутся по модулю 125. Если x делится на 5, то все числа $2^n \cdot x$ делятся на 5 и поэтому остатки $2^n \cdot x \pmod{125}$ при любых n будут кратны пяти. Тем самым в этом случае останутся свободными («непосещенными») как минимум 100 секторов с номерами, не кратными пяти. Если же x не делится на 5, то все числа $2^n \cdot x$ не кратны пяти, а значит, и остатки $2^n \cdot x \pmod{125}$ не кратны пяти, и в этом случае свободными останутся как минимум 25 секторов, кратных пяти. **б)** В пункте а) доказана оценка: кузнечик не может посетить более 100 секторов. Осталось привести пример. Пусть вначале кузнечик сидел в секторе с номером 1. Требуется доказать, что остатки $2^n \pmod{125}$ принимают 100 различных значений при $n = 0, 1, \dots, 99$. Сначала проверим, что $2^{100} \equiv 1 \pmod{125}$. Имеем: $2^{10} = 1024 \equiv -1 \pmod{25}$, отсюда $2^{20} = (2^{10})^2 \equiv 1 \pmod{25}$. Поэтому при разложении разности пятых степеней $(2^{20})^5 - 1 = 2^{100} - 1 = (2^{20} - 1)(2^{80} + 2^{60} + 2^{40} + 2^{20} + 1)$ первый множитель делится на 25, а во втором множителе каждое из пяти слагаемых сравнимо с 1 $\pmod{25}$ и значит, второй множитель делится на 5. Далее докажем, что для натуральных показателей $m < 100$ остатки $2^m \pmod{125}$ не равны единице и поэтому эти остатки при $m < 100$ не повторяются (т.к. из сравнения $2^{m_1} \equiv 2^{m_2} \pmod{125}$, где $m_1 < m_2$, следовало бы, что $2^{m_2 - m_1} \equiv 1 \pmod{125}$). Действительно, если для некоторого наименьшего натурального $m < 100$ остаток $2^m \equiv 1 \pmod{125}$, то в силу сравнения $2^{100} \equiv 1 \pmod{125}$, показатель m должен быть делителем $100 = 2^2 \cdot 5^2$, а значит, делителем либо $50 = 2 \cdot 5^2$, либо $20 = 2^2 \cdot 5$. Но в первом случае $2^{50} - 1$ не делится даже на 5, а во втором – имеем $2^{20} - 1 = (2^{10} - 1)(2^{10} + 1)$, где первый множитель не делится на 5, а второй равен 1025, т.е. не делится на 125. *Комментарий. Сравнение $2^{100} \equiv 1 \pmod{125}$ следует из теоремы Эйлера (обобщение малой теоремы Ферма). При её использовании доказательство не требуется, нужно лишь сформулировать и проверить её условия в данном случае.*

10.5. Последовательность a_n задается рекуррентно: $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{10}{9}$. Какова вероятность, что случайно выбранный член последовательности является целым числом?

Ответ: 1/6. Решение. Выражение для a_{n+2} перепишем в виде $a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$. Поэтому для $n \geq 1$

будем иметь $a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) = 4(a_n - a_{n-1}) = \dots = 2^n(a_2 - a_1) = \frac{1}{9} \cdot 2^n$. Тогда

$a_{n+2} = a_1 + (a_2 - a_1) + \dots + (a_{n+2} - a_{n+1}) = 1 + \frac{1}{9}(1 + 2 + \dots + 2^n) = 1 + \frac{1}{9}(2^{n+1} - 1)$. Поскольку $2^6 \equiv 1 \pmod{9}$, то

$2^{6k} \equiv 1 \pmod{9}$ при всех натуральных k , и степени двойки дают остатки $\pmod{9}$ с периодом 6, а именно: 2, 4, 8, 7, 5, 1. Итак, члены подпоследовательности $a_1, a_7, a_{13}, a_{19}, \dots$ (каждый шестой), и только они, будут целыми числами и поэтому искомая статистическая вероятность равна 1/6. *Комментарий. Те, кто знает метод решения линейных рекуррентных уравнений, могут применить его для нахождения формулы общего члена a_n вместо вышеприведенного приема.*