

**Межрегиональная олимпиада школьников «Будущие исследователи – будущее науки»
Математика, финальный тур, 2025-2026 уч.г.**

11 класс

11.1. При каких значениях параметра a уравнение $5 + \cos 2x = 4a + 4a \sin x$ имеет решение?

Ответ: $a \geq 0,5$. **Решение.** Введем замену $t = \sin x$, где $|t| \leq 1$. Применяя формулу косинуса двойного угла, получим уравнение $t^2 + 2at + 2a - 3 = 0$. Требуется найти все a , для которых это уравнение имеет хотя бы один корень на отрезке $[-1; 1]$. Пусть $f(t)$ – квадратный трехчлен (парабола) в левой части уравнения. Ветви параболы направлены вверх, а значение $f(-1) = 1 - 2a + 2a - 3 = -2 < 0$ (при всех a). Поэтому один из корней $f(t)$ меньше (-1) , а условие существования другого корня на отрезке $[-1; 1]$ равносильно неравенству $f(1) \geq 0$. Таким образом, $f(1) = 1 + 2a + 2a - 3 = 4a - 2 \geq 0$, т.е. $a \geq 0,5$.

11.2. Дан тетраэдр $SABC$. Требуется пересечь его плоскостью, параллельной основанию ABC , и выбрать точку M в плоскости основания так, чтобы объем тетраэдра $MA_1B_1C_1$ был наибольшим, где A_1, B_1, C_1 – точки пересечения плоскости сечения с боковыми ребрами тетраэдра $SABC$. Найдите отношение объема искомого тетраэдра $MA_1B_1C_1$ к объему тетраэдра $SABC$.

Ответ: $4/27$. **Решение.** Так как плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны, то объем тетраэдра $MA_1B_1C_1$ не зависит от положения точки M в плоскости ABC . Обозначим через x коэффициент подобия тетраэдров $SA_1B_1C_1$ и $SABC$. Тогда площади оснований тетраэдров $MA_1B_1C_1$ и ABC относятся как x^2 , а высоты – как $(1 - x)$ (т.к. высоты тетраэдров $SA_1B_1C_1$ и $SABC$ относятся как x , а высота тетраэдра $MA_1B_1C_1$ равна разности высот тетраэдра $SABC$ и тетраэдра $SA_1B_1C_1$). Обозначив отношение объемов данных тетраэдров через $y = y(x)$, $0 < x < 1$, получаем задачу на максимум функции $y = x^2(1 - x)$. Решая её с помощью производной $y' = 2x - 3x^2$, находим критическую точку $x_0 = \frac{2}{3}$, в которой знак производной меняется с плюса на минус, и значит, достигается максимум $y(x_0) = 4/27$, а на границе ОДЗ $y(0)=y(1)=0$.

11.3. Круг разбит на 125 секторов, занумерованных по часовой стрелке последовательными числами от 1 до 125 (начиная с некоторого сектора). Вначале в одном из секторов сидит кузнечик. Затем он прыгает, перемещаясь каждый раз по кругу на количество секторов по часовой стрелке, равное номеру текущего сектора. а) Докажите, что существует по меньшей мере 25 секторов, в которых кузнечик не сможет побывать. б) Какое наибольшее количество секторов он может посетить?

Ответ: б) 100. **Решение.** а) Пусть вначале кузнечик сидел в секторе под номером x . Тогда после одного прыжка он будет в секторе $x + x = 2x$, после двух прыжков – в секторе $4x$, и т.д.: после n прыжков – в секторе $2^n \cdot x$, где все номера секторов берутся по модулю 125. Если x делится на 5, то все числа $2^n \cdot x$ делятся на 5 и поэтому остатки $2^n \cdot x \pmod{125}$ при любых n будут кратны пяти. Тем самым в этом случае останутся свободными («непосещенными») как минимум 100 секторов с номерами, не кратными пяти. Если же x не делится на 5, то все числа $2^n \cdot x$ не кратны пяти, а значит, и остатки $2^n \cdot x \pmod{125}$ не кратны пяти, и в этом случае свободными останутся как минимум 25 секторов, кратных пяти. б) В пункте а) доказана оценка: кузнечик не может посетить более 100 секторов. Осталось привести пример. Пусть вначале кузнечик сидел в секторе с номером 1. Требуется доказать, что остатки $2^n \pmod{125}$ принимают 100 различных значений при $n = 0, 1, \dots, 99$. Сначала проверим, что $2^{100} \equiv 1 \pmod{125}$. Имеем: $2^{10} = 1024 \equiv -1 \pmod{25}$, отсюда $2^{20} = (2^{10})^2 \equiv 1 \pmod{25}$. Поэтому при разложении разности пятых степеней $(2^{20})^5 - 1 = 2^{100} - 1 = (2^{20} - 1)(2^{80} + 2^{60} + 2^{40} + 2^{20} + 1)$ первый множитель делится на 25, а во втором множителе каждое из пяти слагаемых сравнимо с $1 \pmod{25}$ и значит, второй множитель делится на 5. Далее докажем, что для натуральных показателей $m < 100$ остатки $2^m \pmod{125}$ не равны единице и поэтому эти остатки при $m < 100$ не повторяются (т.к. из сравнения $2^{m_1} \equiv 2^{m_2} \pmod{125}$, где $m_1 < m_2$, следовало бы, что $2^{m_2 - m_1} \equiv 1 \pmod{125}$). Действительно, если для некоторого наименьшего натурального $m < 100$ остаток $2^m \equiv 1 \pmod{125}$, то в силу сравнения $2^{100} \equiv 1 \pmod{125}$, показатель m должен быть делителем $100 = 2^2 \cdot 5^2$, а значит, делителем либо $50 = 2 \cdot 5^2$, либо $20 = 2^2 \cdot 5$. Но в первом случае $2^{50} - 1$ не делится даже на 5, а во втором – имеем $2^{20} - 1 = (2^{10} - 1)(2^{10} + 1)$, где первый множитель не делится на 5, а второй равен 1025, т.е. не делится на 125. *Комментарий.* Сравнение $2^{100} \equiv 1 \pmod{125}$ следует из теоремы Эйлера (обобщение малой теоремы Ферма). При её использовании доказательство не требуется, нужно лишь сформулировать и проверить её условия в данном случае.

11.4. Последовательность a_n задается рекуррентно: $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{10}{9}$. Какова вероятность, что случайно выбранный член последовательности является целым числом?

Ответ: 1/6. **Решение.** Выражение для a_{n+2} перепишем в виде $a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$. Поэтому для $n \geq 1$

будем иметь $a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) = 4(a_n - a_{n-1}) = \dots = 2^n(a_2 - a_1) = \frac{1}{9} \cdot 2^n$. Тогда

$a_{n+2} = a_1 + (a_2 - a_1) + \dots + (a_{n+2} - a_{n+1}) = 1 + \frac{1}{9}(1 + 2 + \dots + 2^n) = 1 + \frac{1}{9}(2^{n+1} - 1)$. Поскольку $2^6 \equiv 1 \pmod{9}$, то

$2^{6k} \equiv 1 \pmod{9}$ при всех натуральных k , и степени двойки дают остатки $\pmod{9}$ с периодом 6, а именно: 2, 4, 8, 7, 5, 1. Итак, члены подпоследовательности $a_1, a_7, a_{13}, a_{19}, \dots$ (каждый шестой), и только они, будут целыми числами и поэтому искомая статистическая вероятность равна 1/6. *Комментарий. Те, кто знает метод решения линейных рекуррентных уравнений, могут применить его для нахождения формулы общего члена a_n вместо вышеприведенного приема.*

11.5. Учитель написал на доске 9 различных положительных чисел и дал задание 6 ученикам вычислить и записать в тетради: Ане – набор произведений всевозможных пар чисел на доске, Боре – набор произведений всевозможных троек, и т.д., Егору – набор произведений всевозможных «семёрок». Могло ли в результате оказаться так, что для каждого из учеников есть другой ученик, у которого записан точно такой же набор? (Равные числа в наборе повторяются столько раз, сколько получается одинаковых произведений).

Ответ: могло. **Решение.** Пусть на доске учитель написал числа 2^n , где n принимает последовательные 9 целых значений от -4 до 4. Отметим, что произведение всех чисел на доске равно 1. Обозначим множество чисел на доске через $A = \{a_1, \dots, a_9\}$, а множество шести учеников через Y . Обозначим учеников так: $y_2, y_3, \dots, y_7$ в соответствии с полученным от учителя заданием, так что Аня = y_2 , Боря = y_3 , ..., Егор = y_7 . Количество выписанных чисел (произведений) в наборе ученика y_k равно C_9^k . Тем самым, у пары учеников y_k и y_{9-k} выписано одинаковое количество чисел (т.к. $C_9^k = C_9^{9-k}$). Покажем, что у этой пары и сами наборы совпадают. Пусть одно (произвольное) из произведений в наборе ученика y_k равно $a_{i_1} \cdot \dots \cdot a_{i_k} = x$. Обозначим обратные величины $a_{i_1}^{-1} = a_{j_1}, \dots, a_{i_k}^{-1} = a_{j_k}$. Они тоже принадлежат множеству A в силу его определения. Произведение этих обратных величин равно x^{-1} . Рассмотрим дополнение $A \setminus \{a_{j_1}, \dots, a_{j_k}\}$. Оно представляет собой подмножество в A , состоящее из $(9 - k)$ чисел. Произведение чисел этого подмножества равно $(x^{-1})^{-1} = x$ (т.к. произведение всех чисел из A равно 1). Итак, мы поставили в соответствие любому числу из набора y_k равное ему число из набора y_{9-k} . *Комментарий. 1) Как следует из доказательства, в конструкции примера на доске важно лишь наличие единицы и пар взаимно обратных величин. 2) Покажем, что соответствие, построенное в данном доказательстве, взаимно-однозначное (за отсутствие обоснования взаимной однозначности баллы за задачу предлагается не снижать). Указанное соответствие можно представить в виде композиции двух отображений на семействе подмножеств (мощности больше 1, но меньше 8) множества A . Первое из них переводит подмножество $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\}$ в подмножество $\{a_{j_1}, \dots, a_{j_k}\}$, составленное из обратных величин, а второе отображение ставит в соответствие подмножеству $\{a_{j_1}, \dots, a_{j_k}\}$ его дополнение $A \setminus \{a_{j_1}, \dots, a_{j_k}\}$. Оба этих отображения являются, очевидно, взаимно-однозначными, что и доказывает взаимную однозначность построенного соответствия.*