

Межрегиональная олимпиада школьников «Будущие исследователи – будущее науки»
Математика, финальный тур, 2025-2026 уч.г.

Время выполнения 180 минут

Каждая из пяти задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 20 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов.

7 класс

- 7.1.** К числу 2026 припишите по одной цифре слева и справа, чтобы полученное шестизначное число делилось на 936. Укажите все возможные решения.

Ответ: 420264. **Решение.** Разложим 936 на простые множители: $936 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 13$. Чтобы число делилось на 936 необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 8, на 9 и на 13. По признаку делимости на 8 трехзначное число, образованное тремя последними цифрами, должно делиться на 8. Следовательно, справа к 2026 можно приписать только четную цифру. Из чисел 260, 262, 264, 266, 268 на 8 делится только 264, поэтому справа можно приписать только цифру 4. Получаем число вида $*20264$. По признаку делимости на 9 сумма цифр числа должна делиться на 9. Найдем сумму $2 + 0 + 2 + 6 + 4 = 14$. Чтобы сумма цифр числа $*20264$ делилась на 9, слева можно приписать только цифру 4, т.к. все остальные цифры в сумме с числом 14 не дают числа, кратного 9. Получаем число 420264. Осталось проверить, что оно делится на 13.

- 7.2.** Аня и Боря вышли в 12-00 из пунктов A и B соответственно навстречу друг другу. Они шли с постоянными скоростями, причем скорость Бори на 10% больше скорости Ани. Они поравнялись друг с другом в 12-40 и продолжали своё движение. Во сколько Аня придет в пункт B ?

Ответ: 13-24. **Решение.** Пусть расстояние между пунктами A и B равно S м, скорость Ани равна v м/мин, тогда скорость Бори равна $1,1v$ м/мин, а скорость сближения Ани и Бори равна $v + 1,1v = 2,1v$ (м/мин).

По условию задачи $\frac{S}{2,1v} = 40$, откуда $\frac{S}{v} = 2,1 \cdot 40 = 84$ (мин), т.е. Ане на путь от A до B требуется 84 мин, а поэтому в пункт B Аня придет в 13-24.

- 7.3.** Дан прямоугольник, отличный от квадрата. Известно, что его площадь численно равна утроенному периметру. Докажите, что у этого прямоугольника меньшая сторона меньше 12, а большая – больше 12.

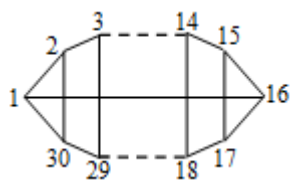
Решение. Пусть меньшая сторона прямоугольника равна x , а большая – y . Тогда утроенный периметр прямоугольника равен $3(2x + 2y) = 6x + 6y$, а площадь равна xy . По условию задачи $xy = 6x + 6y$. Запишем это равенство в виде $(x-6)(y-6) = 36$. В левой части последнего равенства оба множителя положительны, т.к. в противном случае произведение $(6-x)(6-y)$ будет меньше 36. Тогда меньший множитель $(x-6)$ меньше 6, а больший $(y-6)$ – больше 6. Отсюда следует результат.

- 7.4.** а) Дано простое число, которое представлено в виде суммы квадратов четырех различных простых чисел. Может ли в этом представлении присутствовать 3^2 ? б) Найдите наименьшее простое число, представимое в виде суммы квадратов четырех различных простых чисел.

Ответ: а) не может; б) $199 = 2^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2$. **Решение.** Пусть $p = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2$, где p_1, p_2, p_3, p_4 – различные простые числа, взятые в порядке возрастания. Тогда $p_1 = 2$, т.к. иначе число p как сумма четырех нечетных чисел было бы четным (и больше 2). а) Если $p_2 = 3$, то каждое из чисел p_1^2, p_3^2 и p_4^2 при делении на 3 даёт остаток 1 (т.к. квадраты чисел, не кратных трём, дают остаток 1 при делении на 3). Но тогда $p > 3$ и делится на 3, т.е. p не является простым числом, что противоречит условию. Значит, в указанном представлении числа p не может присутствовать 3^2 . б) В силу пункта а) в указанном представлении нет 3^2 , и поэтому наименьший «кандидат» для проверки $2^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 = 199$, и действительно, число 199 является простым. *Комментарий. Пункт б) можно решить и без пункта а) с помощью небольшого перебора (но при обосновании простоты и минимальности данного примера).*

- 7.5.** В классе 30 человек. Может ли оказаться так, что а) у каждого ученика ровно три друга в классе? б) у любых двух учеников разное число друзей в классе?

Ответ: а) может; б) не может. **Решение.** а) См. схему (граф), на которой отрезки соединяют пары друзей.



б) Если предположить, от противного, что у всех разное количество друзей, то (поскольку 30 друзей быть не может), эти количества представляют собой все целые числа от 0 до 29. Но если у кого-то 0 друзей (т.е. друзей нет), то не может быть ученика, у которого все 29 друзей. Противоречие.