

Межрегиональная олимпиада школьников «Будущие исследователи – будущее науки»
Математика, финальный тур, 2025-2026 уч.г.

8 класс

- 8.1. Аня и Боря вышли в 12-00 из пунктов A и B соответственно навстречу друг другу. Они шли с постоянными скоростями, причем скорость Бори на 10% больше скорости Ани. Они поравнялись друг с другом в 12-40 и продолжали своё движение. Во сколько Аня придет в пункт B ?

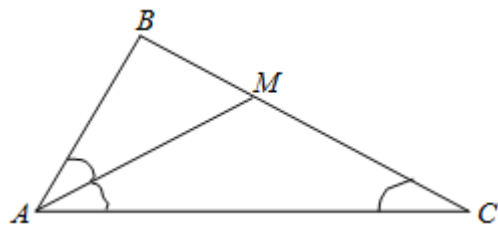
Ответ: 13-24. **Решение.** Пусть расстояние между пунктами A и B равно S м, скорость Ани равна v м/мин, тогда скорость Бори равна $1,1v$ м/мин, а скорость сближения Ани и Бори равна $v + 1,1v = 2,1v$ (м/мин).

По условию задачи $\frac{S}{2,1v} = 40$, откуда $\frac{S}{v} = 2,1 \cdot 40 = 84$ (мин), т.е. Ане на путь от A до B требуется 84 мин,

а поэтому в пункт B Аня придет в 13-24.

- 8.2. В треугольнике ABC , у которого угол A вдвое больше угла C , проведена биссектриса AM . Можно ли утверждать, что угол A острый, если известно, что $CM > BM$?

Ответ: можно. **Решение.** Так как $\angle A = 2\angle C$ и AM – биссектриса $\angle BAC$, то $\angle BAM = \angle MAC = 0,5\angle A =$



$= \angle C$. Значит, треугольник AMC равнобедренный и $AM = MC$. Таким образом, из условия задачи следует, что $AM > BM$, и поэтому в треугольнике ABM имеем: $\angle B > \angle BAM = \angle C$. Поскольку $\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C^\circ$, получаем неравенство $180^\circ - 3\angle C^\circ > \angle C$, откуда $4\angle C < 180^\circ$ и значит, $\angle C < 45^\circ$. Таким образом, $\angle A = 2\angle C < 90^\circ$.

Комментарий. Свойство биссектрисы $CM : BM = CA : BA$

также позволяет сделать вывод о том, что $\angle B > \angle C$ в треугольнике ABC , т.к. $CA > BA$.

- 8.3. На доске записано несколько целых чисел. Саша заменил каждое число (стерев его) следующим образом: каждое число, делящееся на 3, он сократил в три раза, а остальные числа заменил на утроенные. Могло ли оказаться так, что сумма новых и сумма исходных чисел совпали, если сумма исходных чисел была равна а) 2026; б) 100?

Ответ: а) не могло; б) могло. **Решение.** Обозначим через A начальную сумму чисел, делящихся на 3, B –

сумму остальных чисел. Тогда должно выполняться равенство $\frac{A}{3} + 3B = A + B \Leftrightarrow A = 3B$. Значит,

сумма на доске должна быть равна $A + B = 4B$. а) Если $A + B = 2026$, то это приводит к противоречию с делимостью на 4. б) Если $A + B = 100$, то легко проверить такой пример: пусть на доске были записаны два числа 75 и 25.

- 8.4. Дано простое число p , которое представлено в виде суммы квадратов четырех простых чисел p_1, p_2, p_3, p_4 , где $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$. Докажите, что $p_2 - p_1 > 2$.

Решение.

Пусть $p = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2$, где p_1, p_2, p_3, p_4 – различные простые числа, взятые в порядке возрастания. Тогда $p_1 = 2$, т.к. иначе число p как сумма четырех нечетных чисел было бы четным (и больше 2). а) Если $p_2 = 3$, то каждое из чисел p_1^2, p_3^2 и p_4^2 при делении на 3 даёт остаток 1 (т.к. квадраты чисел, не кратных трём, дают остаток 1 при делении на 3). Но тогда $p > 3$ и делится на 3, т.е. p не является простым числом, что противоречит условию. Значит, в указанном представлении числа p не может присутствовать 3^2 . доказано, что $p_1 = 2$ и $p_2 > 3$.

- 8.5. Имеется 100 палочек, длина каждой из них больше единицы, но меньше $(1,5)^{100}$. Докажите, что найдутся три палочки, из которых можно сложить треугольник.

Решение. Рассуждая от противного, предположим, что никакие три палочки не составляют треугольник.

Расположим данные палочки в порядке возрастания длины. Тогда их длины a_n представляют монотонно возрастающую (возможно, нестрого) последовательность, которая (в силу предположения) удовлетворяет неравенствам $a_{n+2} \geq a_n + a_{n+1}$ при всех $n = 1, 2, \dots, 98$. Тогда $a_3 > 1 + 1 = 2$, $a_4 > 2 + 1 = 3$, $a_5 > 3 + 2 = 5$, и аналогично, получаем $a_6 > 8$, $a_7 > 13$, $a_8 > 21$, $a_9 > 34$, $a_{10} > 55$, $a_{11} > 89 > (1,5)^{11}$, т.к. $(1,5)^{11} < 87$, $a_{12} > 144 > (1,5)^{12}$, т.к. $(1,5)^{12} < 130$. Докажем теперь по индукции, что $a_n > (1,5)^n$ при всех $n > 10$. База индукции проверена последними оценками выше. Шаг индукции получается так: $a_{n+2} \geq a_n + a_{n+1} > (1,5)^n + (1,5)^{n+1} = (1,5)^n \cdot (1 + 1,5) > (1,5)^n \cdot (1,5)^2 = (1,5)^{n+2}$. Итак, индукционное утверждение доказано, и при $n = 100$ приходим к противоречию с условием задачи на максимальную длину палочек.

Комментарии. 1) Члены последовательности a_n оцениваются снизу последовательностью Фибоначчи, и для тех, кто знает формулу общего члена ряда Фибоначчи, можно было бы ею воспользоваться, предварительно доказав её. Но и после этого потребовалось бы доказывать оценку $a_n > (1,5)^n$. 2) Сравнения чисел 87 и 144 с соответствующими степенями 1,5 легко получаются без калькулятора, на листочке.