

9 класс

- 9.1. Дано сто чисел: $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{100}$. Вычислим 98 разностей (через одно число): $a_1 = \sqrt{3} - 1$, $a_2 = \sqrt{4} - \sqrt{2}$, ..., $a_{98} = \sqrt{100} - \sqrt{98}$. Докажите, что $17,5 < a_1 + a_2 + \dots + a_{98} < 17,6$.

Решение. $a_1 + a_2 + \dots + a_{98} = \sqrt{3} - 1 + \sqrt{4} - \sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{98} - \sqrt{96} + \sqrt{99} - \sqrt{97} + \sqrt{100} - \sqrt{98} =$
 $= \sqrt{100} + \sqrt{99} - \sqrt{2} - 1 = 9 + \sqrt{99} - \sqrt{2}$. В силу того, что $9,94^2 = 98,8036 < 99 < 99,0025 = 9,95^2$ и $1,41^2 = 1,9881 < 2 < 2,0164 = 1,42^2$, получаем следующие оценки $17,52 = 9 + 9,94 - 1,42 < 9 + \sqrt{99} - \sqrt{2} < 9 + 9,95 - 1,41 = 17,54$. Значит, $17,5 < a_1 + a_2 + \dots + a_{98} < 17,6$.

Комментарий. Здесь для получения оценки сверху достаточно неравенств $\sqrt{99} < 10$ и $\sqrt{2} > 1,4$, т.е. с точностью до десятых, а для оценки снизу надо оценивать квадратные корни с точностью до сотых: $\sqrt{99} > 9,94$ и $\sqrt{2} < 1,42$. Использование вместо строгих неравенств приближенных равенств $\approx$ для корней без уточнения погрешностей при оценке результата считается грубой ошибкой.

- 9.2. На доске записано несколько целых чисел. Саша заменил каждое число (стерев его) следующим образом: каждое число, делящееся на 3, он сократил в три раза, а остальные числа заменил на утроенные. Могло ли оказаться так, что сумма новых и сумма исходных чисел совпали, если сумма исходных чисел была равна а) 2026; б) 100?

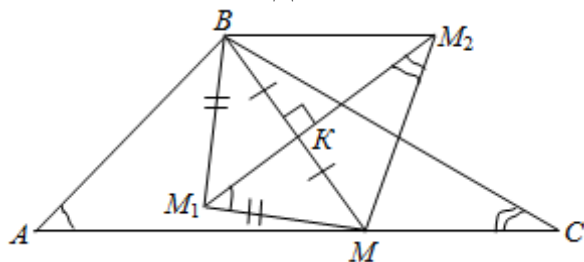
Ответ: а) не могло; б) могло. **Решение.** Обозначим через A начальную сумму чисел, делящихся на 3, B – сумму остальных чисел. Тогда должно выполняться равенство $\frac{A}{3} + 3B = A + B \Leftrightarrow A = 3B$. Значит, сумма на доске должна быть равна $A + B = 4B$. а) Если $A + B = 2026$, то это приводит к противоречию с делимостью на 4. б) Если $A + B = 100$, то легко проверить такой пример: пусть на доске были записаны два числа 75 и 25.

- 9.3. Сколько существует шестизначных натуральных чисел, составленных из нечетных цифр, среди которых а) ровно одна семерка и одна девятка? б) есть и семерка и девятка?

Ответ: а) 2430. б) 8162. **Решение.** а) Количество шестизначных чисел, составленных из нечетных цифр и содержащих ровно одну семерку и одну девятку определяется (по правилу произведения) как произведение числа способов выбора мест для семерки и девятки на число способов заполнения остальных мест любыми нечетными цифрами, кроме семерки и девятки. Место для семерки можно выбрать 6 способами, после чего место для девятки – 5 способами. Остальные 4 места в шестизначном числе заполняются любыми из оставшихся трёх цифр (1, 3 или 5). Таким образом, получаем $6 \cdot 5 \cdot 3^4 = 2430$. б) Для того, чтобы найти количество шестизначных чисел, составленных из нечетных цифр, среди которых есть и семерка, и девятка, рассмотрим дополнительное множество, т.е. найдем количество шестизначных чисел, составленных из нечетных цифр и не содержащих хотя бы одну из цифр 7 или 9. Количество шестизначных чисел, составленных из нечетных цифр и не содержащих семерку, равно 4^6 , и аналогично, количество шестизначных чисел из нечетных цифр, не содержащих девятку, равно 4^6 . Если сложить эти количества, то при этом дважды будут учтены числа, составленные из нечетных цифр и не содержащие ни семерку, ни девятку, а таких чисел 3^6 . Таким образом, количество шестизначных чисел, составленных из нечетных цифр и не содержащих хотя бы одну из цифр 7 или 9, равно $2 \cdot 4^6 - 3^6$. Общее количество шестизначных чисел, составленных из нечетных цифр, равно 5^6 . Поэтому искомое количество равно $5^6 - 2 \cdot 4^6 + 3^6 = 8162$.

- 9.4. Дан треугольник ABC периметра P с острыми углами A и C . Для текущей точки M на стороне AC рассматриваются точки M_1 и M_2 – центры окружностей, описанных около треугольников ABM и CBM . Чему равно наименьшее значение периметра треугольника M_1MM_2 ?

Ответ: $P/2$. **Решение.** Докажем сначала подобие треугольников M_1MM_2 и ABC . Пусть K – середина



отрезка BM . Тогда точки M_1 , K и M_2 лежат на одной прямой, перпендикулярной отрезку BM . По свойству вписанного угла A для описанной около треугольника ABM окружности с центром в M_1 : имеем: $\angle BM_1M = 2\angle A$, а в силу того, что треугольник BM_1M с основанием BM равнобедренный, получаем: $\angle KM_1M = \angle A$. Аналогично, $\angle KM_2M = \angle C$. Значит, треугольники M_1MM_2 и ABC подобны, а в подобных

треугольниках коэффициент подобия равен отношению соответствующих высот. Высота в треугольнике M_1MM_2 из вершины M равна $MK = BM/2$, а высота в треугольнике ABC из вершины B не зависит от точки M . Так как углы A и C острые, то основание этой высоты лежит на стороне AC , и коэффициент подобия будет минимальным, когда наклонная BM совпадет с этой высотой. Таким образом, минимальное значение коэффициента подобия равно $0,5$ и соответствует минимальному значению периметра треугольника M_1MM_2 , равного $P/2$.

- 9.5. Докажите, что число $N = 2^{2026} + 1$ имеет не менее а) двух различных простых делителей; б) трех различных простых делителей.

Решение. а) N делится на 5, что следует из проверки последней цифры, равной 5, т.к. последние цифры степеней любого числа, в данном случае – двойки, повторяются с периодом 4 (другой способ проверки заключается в рассмотрении сравнения по модулю 5). Таким образом, $N = 5 \cdot ((2^{2026} + 1)/5)$. Осталось проверить, что $(2^{2026} + 1)$ не делится на 25 (и тогда любой простой делитель $N/5$ будет искомым). Поскольку $2^{10} = 1024$ имеет вид $25k - 1$, то $2^{2020} = (2^{10})^{202}$ будет иметь вид $25k + 1$ (даёт остаток 1 при делении на 25, т.к. степень 202 четная), и поэтому $2^{2026} = 2^{2020} \cdot 2^6 = 2^{2020} \cdot 64$ имеет вид $25k + 14$, а N имеет вид $25k + 15$. б) Дополним N до полного квадрата: $N = 2^{2026} + 1 = 2^{2026} + 2 \cdot 2^{1013} + 1 - 2^{1014} = (2^{1013} + 1)^2 - (2^{507})^2 = (2^{1013} + 1 - 2^{507})(2^{1013} + 1 + 2^{507})$. Обозначим через A и B первый и второй сомножитель, соответственно. Эти сомножители взаимно просты, т.к. их разность равна 2^{508} , а сами сомножители нечетные. Первый сомножитель A делится на 5: действительно, при делении на 5 число 2^{1013} даёт остаток 2, а 2^{507} даёт остаток 3 (см. пункт а). Число B не делится на 5, т.к. отличается от A на степень двойки. Поэтому имеем разложение $N = 5 \cdot \frac{A}{5} \cdot B$ на три множителя, и для того, чтобы показать, что эти три множителя делятся на разные простые числа, достаточно проверить, что A не делится на 25. Но это следует из пункта а), т.к. мы показали, что N не делится на 25.