

**Межрегиональная олимпиада школьников «Будущие исследователи – будущее науки»
Математика, финальный тур, 2025-2026 уч.г.**

10 класс

- 10.1.** Дано сто чисел: $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{100}$. Вычислим 98 разностей (через одно число): $a_1 = \sqrt{3} - 1$, $a_2 = \sqrt{4} - \sqrt{2}$, ..., $a_{98} = \sqrt{100} - \sqrt{98}$. Докажите, что $17,5 < a_1 + a_2 + \dots + a_{98} < 17,6$.
- 10.2.** Существуют ли рациональные, но не целые, числа x, y , для которых **а)** числа $2x^2 + y^2$ и $x^2 - 4y^2$ ненулевые целые; **б)** числа $2x^2 + y^2$ и $3x^2 - 4y^2$ целые?
- 10.3.** Дан треугольник ABC площади S с острыми углами A и C . Для текущей точки M на стороне AC рассматриваются точки M_1 и M_2 – центры окружностей, описанных около треугольников ABM и CBM . Чему равно наименьшее значение площади треугольника M_1MM_2 ?
- 10.4** Круг разбит на 125 секторов, занумерованных по часовой стрелке последовательными числами от 1 до 125 (начиная с некоторого сектора). Вначале в одном из секторов сидит кузнечик. Затем он прыгает, перемещаясь каждый раз по кругу на количество секторов по часовой стрелке, равное номеру текущего сектора. **а)** Докажите, что существует по меньшей мере 25 секторов, в которых кузнечик не сможет побывать. **б)** Какое наибольшее количество секторов он может посетить?
- 10.5.** Последовательность a_n задается рекуррентно: $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{10}{9}$. Какова вероятность, что случайно выбранный член последовательности является целым числом?