

1 вариант

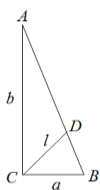
10 класс

- 10.1.** Даны два квадратных трехчлена с одинаковыми старшими коэффициентами. Докажите, что если у каждого из них отрицательный дискриминант, то и у суммы этих трехчленов дискриминант отрицательный.

Решение. По условию, графики квадратных трехчленов $f(x) = ax^2 + b_1x + c_1$ и $g(x) = ax^2 + b_2x + c_2$ с отрицательными дискриминантами не пересекают ось Ox и (в силу равенства старших коэффициентов) $f(x)$ и $g(x)$ одного знака при всех x . Поэтому и сумма $f(x) + g(x)$ будет того же знака при всех x . Отсюда следует результат об отрицательном знаке дискриминанта. **Другое доказательство.** Имеем: $b_1^2 - 4ac_1 < 0$, $b_2^2 - 4ac_2 < 0$. Рассмотрим сумму квадратных трехчленов: $2ax^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)$. Поскольку $(b_1 - b_2)^2 \geq 0$, то $2b_1b_2 \leq b_1^2 + b_2^2$. Поэтому $(b_1 + b_2)^2 - 8a(c_1 + c_2) = b_1^2 + 2b_1b_2 + b_2^2 - 8ac_1 - 8ac_2 \leq 2(b_1^2 - 4ac_1) + 2(b_2^2 - 4ac_2) < 0$.

- 10.2.** В данном прямоугольном треугольнике оба катета имеют иррациональные длины. Могут ли 3 величины: 1) площадь, 2) сумма катетов и 3) биссектриса прямого угла – быть рациональными?

Ответ. все три величины – не могут, но по отдельности могут. **Решение.** Пусть, от противного, иррациональные катеты a, b таковы, что $a + b$, площадь S и биссектриса l – числа рациональные. Рассмотрим $\triangle ABC$ с прямым углом C , катетами $AC = b$, $CB = a$ и биссектрисой $CD = l$. Подсчитаем S следующим образом:



$$S = S_{ACD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}al \sin 45^\circ + \frac{1}{2}bl \sin 45^\circ = \frac{1}{4}l(a+b) \cdot \sqrt{2}.$$

Но равенство $S = \frac{1}{4}l(a+b) \cdot \sqrt{2}$ противоречит тому, что S – число рациональное,

а $\frac{1}{4}l(a+b) \cdot \sqrt{2}$ – иррациональное число как произведение ненулевого рационального числа $\frac{1}{4}l(a+b)$ на иррациональное число $\sqrt{2}$. По отдельности данные величины могут быть рациональными: а именно, площадь и сумма катетов – когда длины катетов $m \pm \sqrt{n}$, где n, m – натуральные, n – не точный квадрат, а биссектриса прямого угла – например, для равнобедренного прямоугольного треугольника с катетами $\sqrt{2}$.

- 10.3.** Можно ли разбить квадрат 10×10 на 100 равных прямоугольников, у каждого из которых длины смежных сторон отличаются на единицу?

Ответ. Нельзя. **Решение.** Предположим, от противного, что такое разбиение существует, и пусть x, y – стороны прямоугольника разбиения ($x \geq y$). Тогда имеем систему из двух уравнений: $xy = 1$ (для площади) и $x - y = 1$ (по условию). Решая систему,

получаем квадратное уравнение для x с положительным корнем $x = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}$, тогда

$y = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$. Рассмотрим сторону квадрата 10×10 . Она составлена из нескольких

больших и нескольких меньших сторон нашего прямоугольника, т.е. $10 = nx + my$ для

некоторых целых неотрицательных m, n . Тогда $10 = \frac{m+n}{2}\sqrt{5} + \frac{m-n}{2}$. Поскольку

$m+n \neq 0$, получаем противоречие: в правой части последнего равенства стоит иррациональное число, а в левой – рациональное.

- 10.4. а)** Докажите, что если натуральные числа x, y удовлетворяют уравнению $x^3 + 15y = y^3 + 15x$, то $x = y$. **б)** Существуют ли различные положительные рациональные числа x, y , удовлетворяющие уравнению $x^3 + y = y^3 + x$?

Ответ. б) Существуют.

Решение. а) Имеем $x^3 - y^3 = 15(x - y)$. Если $x \neq y$, то отсюда после деления на $(x - y)$ получим $x^2 + xy + y^2 = 15$. Самые маленькие (и различные) натуральные числа 1 и 2 при подстановке в левую часть дают $7 \neq 15$, числа 1 и 3 при подстановке дают 13, числа 2 и 3 дают 19, и далее, при бóльших x, y , левая часть возрастает и всегда будет больше 15.

- б)** При $x \neq y$ данное уравнение после приведения левой части к разности кубов и деления на $(x - y)$ сводится к равносильному: $x^2 + xy + y^2 = 1$. Пусть $y = xt$ ($x, y, t \in \mathbf{Q}$). Тогда

$t^2 + t + 1 = \frac{1}{x^2}$. Обозначим $u = \frac{1}{x}, u \in \mathbf{Q}$, и рассмотрим квадратное уравнение

$t^2 + t + 1 - u^2 = 0$. Оно имеет рациональные корни, когда дискриминант – квадрат рационального числа: $1 - 4(1 - u^2) = v^2$, $v \in \mathbf{Q}$. Отсюда

$4u^2 - v^2 = 3 \Leftrightarrow (2u - v)(2u + v) = 3$. Разложить тройку на два рациональных множителя можно разными способами (надо еще не забыть о положительности решения, и для этого v должно быть больше единицы). Возьмем, например, такое разложение: $2u + v = 9$, $2u - v = \frac{1}{3}$. Из данной системы находим $u = \frac{7}{3}, v = \frac{13}{3}$. Тогда $x = \frac{3}{7}$ и

$t = (-1 + v)/2 = \left(-1 + \frac{13}{3}\right)/2 = \frac{5}{3}$. Таким образом, числа $x = \frac{3}{7}$ и $y = \frac{5}{7}$ удовлетворяют уравнению (это можно и непосредственно проверить).

2 вариант

10 класс

- 10.1.** Дан квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ с отрицательным дискриминантом. Докажите, что если $a + b + c < 0$, то числа a и c отрицательны.

Решение. По условию, график параболы не пересекается с осью Ox . Имеем $y(1) = a + b + c < 0$. Значит, ветви параболы направлены вниз и поэтому $a < 0$ и $y(0) = c < 0$. **Другое доказательство.** Из неравенства $D = b^2 - 4ac < 0$ следует, что a и c одного знака. Если предположить, от противного, что $a > 0$ и $c > 0$, то в случае, когда $b > 0$, сразу получим противоречие с неравенством $0 < a + c < -b$, а иначе после возведения в квадрат будем иметь $b^2 > a^2 + c^2 + 2ac \geq 2ac + 2ac = 4ac$, т.е. дискриминант $b^2 - 4ac$ положителен. Противоречие.

- 10.2.** В данном прямоугольном треугольнике оба катета имеют иррациональные длины. Могут ли его площадь и периметр быть целыми числами?

Ответ. Могут. **Решение.** Рассмотрим пример: пусть иррациональные катеты равны $a = 5 - \sqrt{7}$, $b = 5 + \sqrt{7}$. Тогда $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot (5 - \sqrt{7}) \cdot (5 + \sqrt{7}) = 9$ – целое число. По теореме Пифагора гипотенуза равна $\sqrt{(5 - \sqrt{7})^2 + (5 + \sqrt{7})^2} = \sqrt{2 \cdot (25 + 7)} = 8$. Значит, периметр – целое число $(5 - \sqrt{7}) + (5 + \sqrt{7}) + 8 = 18$.

10.3. В некоторые клетки клетчатого квадрата 16×16 поставлен знак "крестик" или "нолик" (некоторые клетки могут оставаться пустыми). Докажите, что найдутся такие два клетчатых квадрата 4×4 , возможно, пересекающиеся, что у одного квадрата столько же крестиков, сколько у другого, и число ноликов у них тоже одинаковое.

Решение. Подсчитаем число всех квадратов 4×4 в клетчатом квадрате 16×16 : оно равно $(16 - 4 + 1)^2 = 169$. Подсчитаем теперь, сколько различных вариантов (с точки зрения условий задачи) заполнения квадрата 4×4 крестиками и ноликами. Если крестиков в квадрате нет, то имеется 17 вариантов (по количеству ноликов: от 0 до 16). Если крестик в квадрате один, то есть 16 вариантов заполнения, и так далее. Всего получим

$$17 + 16 + 15 + \dots + 1 = \frac{17 \cdot 18}{2} = 153 \text{ варианта.}$$

Таким образом, поскольку число квадратов 4×4 больше числа вариантов, получаем утверждение задачи. *Комментарий.* 153 – это число сочетаний с повторениями из 3 по 16, т.к. клеток в квадрате 16, и их заполняем тремя видами элементов – крестик, нолик и пустая клетка. По формуле сочетаний с повторениями имеем $C_{16+3-1}^{16} = C_{18}^2 = 153$ варианта.

10.4. На плоскости дан единичный квадрат и отмечено 200 точек. Докажите, что найдутся две вершины квадрата, от каждой из которых сумма расстояний до отмеченных точек больше 141.

Решение. Пусть A и B – две противоположные вершины квадрата. Для любой отмеченной точки M_i имеем $AM_i + BM_i \geq AB = \sqrt{2}$. Складывая такие неравенства для всех отмеченных точек, получим

$$(AM_1 + AM_2 + \dots + AM_{100}) + (BM_1 + BM_2 + \dots + BM_{100}) \geq 200\sqrt{2}.$$

Значит, хотя бы одна из скобок не меньше $100\sqrt{2} > 141$. Таким образом, хотя бы одна из точек A или B удовлетворяет условию. Рассматривая другую пару противоположных вершин квадрата, найдем еще одну искомую точку.