

1 вариант

11 класс

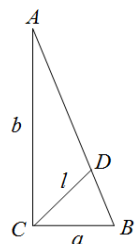
11.1. Решите уравнение $2\cos(\pi x) = x^3 + x^{-3}$.

Ответ. $x = -1$. **Решение.** Левая часть уравнения не превосходит по модулю числа 2, а правая часть по модулю не меньше 2. Для правой части это следует (при положительных x) из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим, а при отрицательных x выражение отличается только знаком. При этом наибольшее по модулю значение 2 достигается (только) для $x = 1$ или $x = -1$. Проверив эти два возможных корня, получаем, что подходит $x = -1$.

11.2. В данном прямоугольном треугольнике оба катета имеют иррациональные длины. Могут ли 3 величины: 1) площадь, 2) сумма катетов и 3) биссектриса прямого угла – быть рациональными?

Ответ. все три величины – не могут, но по отдельности могут.

Решение. Пусть, от противного, иррациональные катеты a, b таковы, что $a + b$, площадь S и биссектриса l – числа рациональные. Рассмотрим $\triangle ABC$ с прямым углом C , катетами $AC = b$, $CB = a$ и биссектрисой $CD = l$. Подсчитаем S следующим



образом: $S = S_{ACD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}al \sin 45^\circ + \frac{1}{2}bl \sin 45^\circ = \frac{1}{4}l(a+b) \cdot \sqrt{2}$. Но

равенство $S = \frac{1}{4}l(a+b) \cdot \sqrt{2}$ противоречит тому, что S – число рациональное, а

$\frac{1}{4}l(a+b) \cdot \sqrt{2}$ – иррациональное число как произведение ненулевого

рационального числа $\frac{1}{4}l(a+b)$ на иррациональное число $\sqrt{2}$. По отдельности данные

величины могут быть рациональными: а именно, площадь и сумма катетов – когда длины катетов $m \pm \sqrt{n}$, где n, m – натуральные, n – не точный квадрат, а биссектриса прямого угла – например, для равнобедренного прямоугольного треугольника с катетами $\sqrt{2}$.

11.3. Можно ли разбить квадрат 10×10 на 100 равных прямоугольников, у каждого из которых длины смежных сторон отличаются на единицу?

Ответ. Нельзя. **Решение.** Предположим, от противного, что такое разбиение существует, и пусть x, y – стороны прямоугольника разбиения ($x \geq y$). Тогда имеем систему из двух уравнений: $xy = 1$ (для площади) и $x - y = 1$ (по условию). Решая систему, получаем квадратное уравнение для x с положительным корнем $x = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}$, тогда $y = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$.

Рассмотрим сторону квадрата 10×10 . Она составлена из нескольких больших и нескольких меньших сторон нашего прямоугольника, т.е. $10 = nx + my$ для некоторых

целых неотрицательных m, n . Тогда $10 = \frac{m+n}{2}\sqrt{5} + \frac{m-n}{2}$. Поскольку $m+n \neq 0$, получаем

противоречие: в правой части последнего равенства стоит иррациональное число, а в левой – рациональное.

11.4. Могут ли уравнению $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 3$ удовлетворять **а)** различные натуральные числа x, y, z ? **б)** различные целые числа x, y, z ?

Ответ. **а)** не могут, **б)** могут. **Решение.** **а)** Из неравенства о средних для трех

положительных чисел следует, что $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x}} = 3$, причем равенство

достигается только в случае равенства чисел $\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x}$. Но в этом случае $x = y = z$:

действительно, обозначим эти равные отношения через t , тогда будем иметь три уравнения: $x = yt$, $y = zt$, $z = xt$ и перемножив их, после сокращения на xuz получим $t^3 = 1 \Leftrightarrow t = 1$. **б)** Пример $x = 4, y = 1, z = -2$ показывает существование искомого решения.

2 вариант

11 класс

11.1. Решите уравнение $\sqrt{\sin(\pi x)} = \sqrt{\cos(2\pi x)}$.

Ответ. $\frac{1}{6} + 2n, \frac{5}{6} + 2k, n, k \in \mathbb{Z}$. **Решение.** Используя формулу косинуса двойного угла,

получаем: $\sqrt{\sin(\pi x)} = \sqrt{\cos(2\pi x)} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(\pi x) \geq 0, \\ \sin(\pi x) = 1 - 2\sin^2(\pi x) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \sin(\pi x) \geq 0, \\ (\sin(\pi x) + 1)(2\sin(\pi x) - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(\pi x) \geq 0, \\ \sin(\pi x) = -1, \sin(\pi x) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \sin(\pi x) = \frac{1}{2}$. Решениями

последнего уравнения являются корни $\frac{1}{6} + 2n, \frac{5}{6} + 2k, n, k \in \mathbb{Z}$.

11.2. В данном прямоугольном треугольнике оба катета имеют иррациональные длины. Могут ли его площадь и периметр быть целыми числами?

Ответ. Могут. **Решение.** Рассмотрим пример: пусть иррациональные катеты равны $a = 5 - \sqrt{7}$,

$b = 5 + \sqrt{7}$ Тогда $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot (5 - \sqrt{7}) \cdot (5 + \sqrt{7}) = 9$ – целое число. По теореме Пифагора

гипотенуза равна $\sqrt{(5 - \sqrt{7})^2 + (5 + \sqrt{7})^2} = \sqrt{2 \cdot (25 + 7)} = 8$. Значит, периметр – целое число $(5 - \sqrt{7}) + (5 + \sqrt{7}) + 8 = 18$.

11.3. На плоскости дан единичный квадрат и отмечено 200 точек. Докажите, что найдутся две вершины квадрата, от каждой из которых сумма расстояний до отмеченных точек больше 141

Решение. Пусть A и B – две противоположные вершины квадрата. Для любой отмеченной точки M_i имеем $AM_i + BM_i \geq AB = \sqrt{2}$. Складывая такие неравенства для всех отмеченных точек, получим

$(AM_1 + AM_2 + \dots + AM_{100}) + (BM_1 + BM_2 + \dots + BM_{100}) \geq 200\sqrt{2}$. Значит, хотя бы одна из скобок не меньше $100\sqrt{2} > 141$. Таким образом, хотя бы одна из точек A или удовлетворяет условию. Рассматривая другую пару противоположных вершин квадрата, найдем еще одну искомую точку.

11.4. Существует ли возрастающая геометрическая прогрессия, из которой можно выбрать три члена (не обязательно соседние), образующие арифметическую прогрессию?

Ответ. Существует. **Решение.** В качестве примера можно привести геометрическую прогрессию $1; q; q^2; q^3$, где $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; для этой прогрессии выполняется равенство $1 + q^3 = 2q^2$, которое с учетом неравенства $q \neq 1$ равносильно (после выделения корня $q = 1$) квадратному уравнению $q^2 - q - 1 = 0$.