

1 вариант

7 класс

7.1. 1 августа предприниматель поднял цену товара на $n\%$, но после того, как товар стали хуже покупать, решил опустить цену с 1 сентября. На сколько процентов он должен опустить цену, чтобы она оказалась прежней – такой, как до 1 августа?

Ответ. $\frac{100n}{100+n}\%$. **Решение.** Пусть до повышения 1 августа цена товара составляла x (руб.),

тогда после повышения цена стала $x\left(1 + \frac{n}{100}\right) = x + \frac{nx}{100}$. Чтобы вернуться к

первоначальной цене, её нужно уменьшить на $\frac{nx}{100}$ (руб). Таким образом, отношение

этой величины к августовской цене равно $\frac{nx}{100} : x\left(1 + \frac{n}{100}\right) = \frac{n}{100+n}$, что в процентах

составляет $\frac{100n}{100+n}\%$..

7.2. В двузначном простом числе поменяли порядок цифр и сложили полученное число с исходным. В результате получили 110. Найдите исходное число (укажите все возможные решения).

Ответ. 19; 37; 73. **Решение.** Пусть $\overline{xy} = 10x + y$ – данное двузначное простое число, тогда $x \geq 1$, а y – нечетная цифра. По условию задачи $\overline{xy} + \overline{yx} = 110 \Leftrightarrow (10x + y) + (10y + x) = 110 \Leftrightarrow 11(x + y) = 110 \Leftrightarrow x + y = 10$. Так как y – нечетная цифра, то последнему равенству удовлетворяют пять пар чисел: 1) $x = 1, y = 9$; 2) $x = 3, y = 7$; 3) $x = 5, y = 5$; 4) $x = 7, y = 3$; 5) $x = 9, y = 1$. Но числа 55 и 91 простыми не являются.

7.3. У учителя в наборе 30 палочек целой длины 6, 7, 8, ..., 35 (см). Он раздал произвольным образом 10 ученикам по три палочки. Обязательно ли хотя бы один из учеников сможет из своих палочек сложить треугольник?

Ответ. Обязательно. **Решение.** Предположим противное. Тогда у каждого ученика длина самой длинной палочки больше или равна сумме длин двух других палочек. Значит, сумма длин самых длинных палочек у всех 10 учеников больше или равна сумме длин остальных палочек. Но у данных 30 палочек сумма длин самых длинных десяти палочек равна $26 + 27 + \dots + 35 = 305$, а сумма длин остальных двадцати палочек равна $6 + 7 + \dots + 25 = 310 > 305$. Таким образом, получили противоречие.

7.4. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать среди первых 2025 натуральных чисел 1, 2, ..., 2025, чтобы разность любых двух выбранных чисел не равнялась 25?

Ответ. 1025. **Решение.** **Пример на 1025 чисел:** 1, 2, ..., 25, 51, 52, ..., 75, 101, 102, ..., 125, ..., 2001, 2002, ..., 2025; они условию задачи удовлетворяют. **Оценка.** Покажем, что больше 1025 чисел быть не может. Так как $2025 = 25 \cdot 81$, то можно разбить числа от 1 до 2025 на 25 групп по 81 числу в каждой так, чтобы в одну группу входили числа с одинаковым остатком от деления на 25. Таким образом, в n -ую группу входит 81 число вида $n, 25 + n, 50 + n, \dots, 2000 + n$, где n принимает фиксированное целое значение от 1 до 25. Если предположить противное, т.е. всего выбранных чисел больше $1025 = 25 \cdot 41$, то среди этих чисел окажется не менее 42 чисел из некоторой группы. Но выбранные

числа не должны оказаться соседними в ряду чисел n -ой группы: $n, 25 + n, 50 + n, \dots, 2000 + n$. А таких чисел не более 41 (максимум 41 будет, когда выбираются числа в ряду через одного: первое, третье, ..., 81-е). Полученное противоречие доказывает нашу оценку.

2 вариант

7 класс

7.1. В фирме «Медиана» всем сотрудникам платят поровну. Директор фирмы сократил штат сотрудников на 30%, а каждому из оставшихся повысил зарплату на 35%. Увеличится или уменьшится суммарная зарплата всех сотрудников фирмы, и на сколько процентов?

Ответ. Уменьшится на 5,5%. **Решение.** Пусть x – количество сотрудников фирмы до сокращения, а y – зарплата одного сотрудника, тогда суммарная зарплата всех сотрудников была равна xy . После сокращения в фирме стало $0,7x$ сотрудников, а после повышения у каждого сотрудника зарплата стала равна $1,35y$. Таким образом, суммарная зарплата всех сотрудников стала равна $0,7x \cdot 1,35y = 0,945xy$, и тем самым, она уменьшилась на $0,055xy$, т.е. на 5,5%.

7.2. Из точки на прямой провели два луча по одну сторону от прямой. Оказалось, что у всех трёх образовавшихся углов градусная мера выражается простыми числами, причем один из углов больше 160° . Найдите все три угла (укажите все возможные решения).

Ответ. $2^\circ, 5^\circ$ и 173° или $2^\circ, 11^\circ$ и 167° . **Решение.** Среди трех простых углов обязан быть угол 2° (из-за четности суммы, равной 180° для развернутого угла, и нечетности простых чисел, кроме двойки). Значит, сумма остальных двух углов равна 178° , при этом один из них больше 160° . Рассмотрим простые числа от 161 до 177 – это 163, 167, 173 (что следует из проверки возможных делителей 3, 5, 7, 11, 13 нечетных чисел от 161 до 177). Число 163 условию задачи не удовлетворяет, так как в этом случае $178 - 163 = 15$, но 15 делится на 3.

7.3. В четырехзначном натуральном числе N поменяли порядок цифр на обратный и получили число M . Могло ли получиться так, что $N - M = 2025$?

Ответ. Не могло. **Решение.** Пусть число $N = \overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$, где a, b, c, d – цифры, причем a не равно 0. Тогда $M = \overline{dcba} = 1000d + 100c + 10b + a$ и $N - M = 999(a - d) + 90(b - c)$. Предположим, от противного, что $N - M = 2025$, тогда $999(a - d) + 90(b - c) = 2025$. Разделив обе части на 9, получим $111(a - d) + 10(b - c) = 225$. Поскольку 225 и 10 делятся на 5, а 111 на 5 не делится, то $a - d$ делится на 5. Но $-8 \leq a - d \leq 9$, поэтому либо $a - d = 0$, либо $a - d = \pm 5$. Если $a - d = 0$, то отсюда $10(b - c) = 225$, но это противоречит тому, что правая и левая части разной четности. Если же $a - d = \pm 5$, то либо $10(b - c) = -330$, либо $10(b - c) = 780$. Следовательно, либо $b - c = -33$, либо $b - c = 78$, но это невозможно, так как $-9 \leq b - c \leq 9$. Получили противоречие.

7.4. На числовой прямой отметили 127 различных натуральных чисел $n_1, \dots, n_{127}$, меньших 2025 (где $n_1 < n_2 < \dots < n_{127}$), и рассмотрели 126 отрезков между соседними точками $[n_1, n_2], [n_2, n_3], \dots, [n_{126}, n_{127}]$. Докажите, что среди этих отрезков найдутся пять одинаковой длины.

Решение. Предположим противное. Тогда сумма длин 126 отрезков не меньше, чем сумма длин самых коротких (возможных) отрезков, а именно $(1 + 1 + 1 + 1) + (2 + 2 + 2 + 2) + \dots + (31 + 31 + 31 + 31) + 32 + 32 = 4 \cdot 32 \cdot 31 / 2 + 64 = 2048$. Но по условию задачи эта сумма не может превосходить $2023 = 2024 - 1$. Таким образом, получаем противоречие.