

8 класс

8.1. Решите уравнение $\frac{(2x-1)^2}{x^3-2x^2+1} + \frac{4x-4x^2-1}{x^3-3x^2+2} = 0$.

Ответ. $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -1$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $\frac{(2x-1)^2}{x^3-2x^2+1} = \frac{(2x-1)^2}{x^3-3x^2+2}$.

Значит, либо $2x-1=0$, либо $\frac{1}{x^3-2x^2+1} = \frac{1}{x^3-3x^2+2}$. Из первого уравнения $x = \frac{1}{2}$

и при этом значении x знаменатели второго уравнения не равны 0, т.е. $x = \frac{1}{2}$ – корень.

Из второго уравнения следует: $x^3-2x^2+1 = x^3-3x^2+2$, т.е. $x^2 = 1$, $x = \pm 1$. При $x = 1$ знаменатель первой дроби обращается в нуль, т.е. $x = 1$ не является корнем. При $x = -1$ оба знаменателя не равны 0.

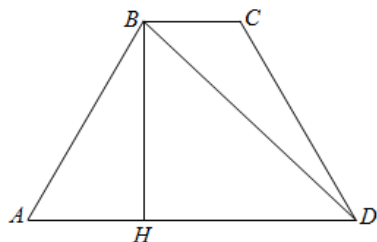
8.2. В двузначном простом числе поменяли порядок цифр и сложили полученное число с исходным. В результате получили 110. Найдите исходное число (укажите все возможные решения).

Ответ. 19; 37; 73. **Решение.** Пусть $\overline{xy} = 10x + y$ – данное двузначное простое число, тогда $x \geq 1$, а y – нечетная цифра. По условию задачи $\overline{xy} + \overline{yx} = 110 \Leftrightarrow (10x + y) + (10y + x) = 110 \Leftrightarrow 11(x + y) = 110 \Leftrightarrow x + y = 10$. Так как y – нечетная цифра, то последнему равенству удовлетворяют пять пар чисел: 1) $x = 1, y = 9$; 2) $x = 3, y = 7$; 3) $x = 5, y = 5$; 4) $x = 7, y = 3$; 5) $x = 9, y = 1$. Но числа 55 и 91 простыми не являются..

8.3. Дана равнобедренная трапеция, у которой длина средней линии равна половине диагонали. Чему равен угол между диагональю и основанием трапеции?

Ответ. 60° .

Решение. Пусть $ABCD$ – равнобедренная трапеция, у которой BD вдвое больше длины средней линии, следовательно, $BD = AD + BC$. Проведем высоту BH трапеции. По свойству равнобедренной трапеции точка H делит основание трапеции на отрезки, больший из которых равен полусумме оснований, т.е. $HD = 0,5(AD + BC) = 0,5BD$. Поэтому в прямоугольном треугольнике BHD катет DH равен половине гипотенузы BD , следовательно, $\angle HBD = 30^\circ$, а $\angle BDH = 60^\circ$.



8.4. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать среди первых 2025 натуральных чисел 1, 2, ..., 2025, чтобы разность любых двух выбранных чисел не равнялась 25?

Ответ. 1025.

Решение. Пример на 1025 чисел: 1, 2, ..., 25, 51, 52, ..., 75, 101, 102, ..., 125, ..., 2001, 2002, ..., 2025; они условию задачи удовлетворяют. **Оценка.** Покажем, что больше 1025 чисел быть не может. Так как $2025 = 25 \cdot 81$, то можно разбить числа от 1 до 2025 на 25 групп по 81 числу в каждой так, чтобы в одну группу входили числа с одинаковым остатком от деления на 25. Таким образом, в n -ую группу входит 81 число вида n ,

$25 + n, 50 + n, \dots, 2000 + n$, где n принимает фиксированное целое значение от 1 до 25. Если предположить противное, т.е. всего выбранных чисел больше $1025 = 25 \cdot 41$, то среди этих чисел окажется не менее 42 чисел из некоторой группы. Но выбранные числа не должны оказаться соседними в ряду чисел n -ой группы: $n, 25 + n, 50 + n, \dots, 2000 + n$. А таких чисел не более 41 (максимум 41 будет, когда выбираются числа в ряду через одного: первое, третье, ..., 81-е). Полученное противоречие доказывает нашу оценку.

8 класс

8.1. Решите уравнение: $\frac{x-9}{10} + \frac{x-10}{9} = \frac{9}{x-10} + \frac{10}{x-9}$.

Ответ. 0; 19; $\frac{181}{19}$.

Решение. Приведем к общему знаменателю левую и правую части. Получим: $\frac{19x - 9^2 - 10^2}{90} = \frac{19x - 9^2 - 10^2}{(x-10)(x-9)}$. Данное равенство будет верным, когда $x \neq 9$, $x \neq 10$ и при этом выполнено одно из следующих условий:

- 1) одинаковые числители полученных дробей равны нулю, то есть $19x = 181$. Тогда $x = \frac{181}{19}$;
- 2) равны знаменатели дробей, то есть $90 = (x-10)(x-9) \Leftrightarrow x^2 - 19x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ либо $x = 19$.

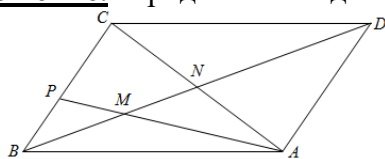
8.2. В четырехзначном натуральном числе N поменяли порядок цифр на обратный и получили число M . Могло ли получиться так, что $N - M = 2025$?

Ответ. Не могло.

Решение. Пусть число $N = \overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$, где a, b, c, d – цифры, причем a не равно 0. Тогда $M = \overline{dcba} = 1000d + 100c + 10b + a$ и $N - M = 999(a - d) + 90(b - c)$. Предположим, от противного, что $N - M = 2025$, тогда $999(a - d) + 90(b - c) = 2025$. Разделив обе части на 9, получим $111(a - d) + 10(b - c) = 225$. Поскольку 225 и 10 делятся на 5, а 111 на 5 не делится, то $a - d$ делится на 5. Но $-8 \leq a - d \leq 9$, поэтому либо $a - d = 0$, либо $a - d = \pm 5$. Если $a - d = 0$, то отсюда $10(b - c) = 225$, но это противоречит тому, что правая и левая части разной четности. Если же $a - d = \pm 5$, то либо $10(b - c) = -330$, либо $10(b - c) = 780$. Следовательно, либо $b - c = -33$, либо $b - c = 78$, но это невозможно, так как $-9 \leq b - c \leq 9$. Получили противоречие.

8.3. В треугольнике ABC из вершины B проведена медиана и на ней отмечена точка M такая, что $AM = BC$. Пусть P – точка пересечения прямой AM со стороной BC . Докажите, что $BP = MP$.

Решение. Продолжим медиану BN на ее длину: $ND = BN$, тогда четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм. Поскольку $AM = BC = AD$, то треугольник DAM – равнобедренный, и поэтому $\angle ADM = \angle AMD$. В силу равенства вертикальных углов $\angle BMP = \angle AMD$ и углов в параллелограмме между диагональю BD и сторонами BC и AD , получим: $\angle PBM = \angle PMB$, то есть треугольник PBM с основанием BM – равнобедренный.



8.4. На числовой прямой отметили 127 различных натуральных чисел $n_1, \dots, n_{127}$, меньших 2025 (где $n_1 < n_2 < \dots < n_{127}$), и рассмотрели 126 отрезков между соседними точками $[n_1, n_2]$, $[n_2, n_3]$, ..., $[n_{126}, n_{127}]$. Докажите, что среди этих отрезков найдутся пять одинаковой длины.

Решение. Предположим противное. Тогда сумма длин 126 отрезков не меньше, чем сумма длин самых коротких (возможных) отрезков, а именно $(1 + 1 + 1 + 1) + (2 + 2 + 2 + 2) + \dots + (31 + 31 + 31 + 31) + 32 + 32 = 4 \cdot 32 \cdot 31 / 2 + 64 = 2048$. Но по условию задачи эта сумма не может превосходить $2023 = 2024 - 1$. Таким образом, получаем противоречие.