ОЛИМПИАДА “БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ – БУДУЩЕЕ НАУКИ” 2022-2023
Физика, II тур
ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

10 класс

1. (25 баллов) Тело бросили с начальной скоростью V_0 под углом α к горизонту. Через время τ бросили второе тело так, что оно полетело по той же траектории. Каким будет минимальное расстояние между телами во время их полета? Через какое время расстояние станет минимальным? Ускорение свободного падения равно g.

Ответ. Минимальное расстояние равно $V_0\tau\cos\alpha$ и достигается через время $\frac{\tau}{2}+\frac{V_0\sin\alpha}{g}$.

Решение. Введем оси x (горизонтальную) и y (вертикальную) из точки броска и запишем зависимости координат тел от времени t (отсчитываемого от броска первого тела) в виде

$$x_1 = V_0\cos\alpha\, t, \qquad y_1 = V_0\sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2},$$

$$x_2 = V_0\cos\alpha\,(t-\tau), \qquad y_2 = V_0\sin\alpha\,(t-\tau) - \frac{g(t-\tau)^2}{2}.$$

Расстояние между телами R определяется формулой

$$R = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},$$

где

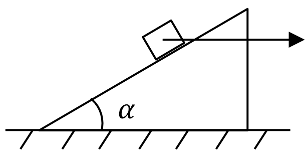
$$x_1 - x_2 = V_0\tau\cos\alpha, \qquad y_1-y_2 = V_0\tau\sin\alpha - g\tau\left(t-\frac{\tau}{2}\right).$$

Поскольку разность x_1-x_2 не зависит от времени, то минимальное значение R достигается в момент, когда разность y_1-y_2 обращается в нуль (тела оказываются на одной высоте), т.е. при

$$t = \frac{\tau}{2}+\frac{V_0\sin\alpha}{g}.$$

В этот момент расстояние между телами равно $V_0\tau\cos\alpha$.

2. (25 баллов) Брусок массы m положили на гладкую наклонную грань клина той же массы с углом α при основании, расположенного на гладком горизонтальном столе, и приложили к бруску горизонтальную силу (см. рис.). При какой величине силы ускорение бруска будет направлено горизонтально? Ускорение свободного падения равно g.



Ответ. Величина силы равна $2mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

Решение. Ускорение клина направлено горизонтально, в сторону действия внешней силы. При горизонтальном ускорении бруска ускорения бруска и клина оказываются сонаправленными и, следовательно, должны быть одинаковыми по величине (брусок находится на клине). Обозначим величину ускорения тел через a.

Клин ускоряется под действием горизонтальной составляющей силы N, действующей со стороны бруска на клин по нормали к наклонной грани клина. Таким образом, второй закон Ньютона для клина в проекции на горизонтальное направление можно записать как

$$ma = N\sin\alpha,$$

откуда следует, что

$$N = ma/\sin\alpha.$$

Клин действует на брусок с такой же по величине, но противоположно направленной силой. Вертикальная компонента этой силы, равная $N\cos\alpha$, должна компенсировать действующую на брусок силу тяжести, чтобы ускорение бруска было горизонтальным, т.е. должно выполняться условие

$$N\cos\alpha = mg.$$

Из двух последних соотношений находим, что

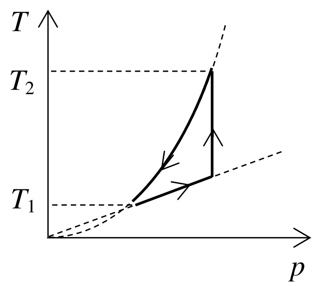
$$N = mg/\cos\alpha,\ a = g\,tg\,\alpha.$$

Обозначив приложенную силу через F, запишем второй закон Ньютона для бруска в проекции на горизонтальное направление как

$$ma = F - N\sin\alpha.$$

Подставляя в это соотношение найденные значения N и a, находим, что

$$F = 2mg\,tg\,\alpha.$$

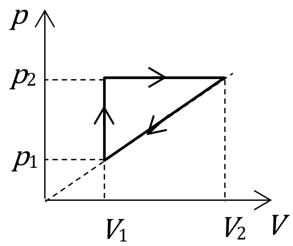


3. (25 баллов) Одноатомный идеальный газ совершает циклический процесс, график которого на плоскости p, T состоит из двух прямых отрезков и участка параболы (см. рис.). Найти КПД цикла, если температуры T_1 и T_2 известны.

Ответ. КПД равен

$$\eta = \frac{\sqrt{T_2/T_1} - 1}{5\sqrt{T_2/T_1} + 3}.$$

Решение.



Изобразим процесс на плоскости p, V, используя уравнение Клапейрона–Менделеева $pV = \nu RT$ (см. рис.).

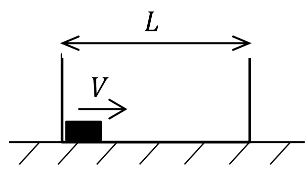
КПД теплового двигателя определяется формулой $\eta = A_ц/Q_п$, где $A_ц$ – работа газа за цикл, а $Q_п$ – полученное газом тепло. Работа газа может быть найдена как площадь треугольника $A_ц = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = \frac{1}{2}\alpha(V_2 - V_1)^2$, где использована линейная зависимость давления от объема $p = \alpha V$ на наклонном участке цикла (гипотенузе треугольника), α – некоторый коэффициент.

Газ получает тепло на вертикальном (изохорном) и горизонтальном (изобарном) участках. Тепло, полученное на изохорном участке, равно приращению внутренней энергии газа: $Q_V = \Delta U = \frac{3}{2}(p_2 - p_1)V_1 = \frac{3}{2}\alpha(V_2 - V_1)V_1$. Тепло, полученное на изобарном участке, равно сумме работы газа и приращения его внутренней энергии: $Q_p = A + \Delta U = p_2(V_2 - V_1) + \frac{3}{2}p_2(V_2 - V_1) = \frac{5}{2}\alpha(V_2 - V_1)V_2$. Таким образом, получаем, что $Q_п = Q_V + Q_p = \frac{1}{2}\alpha(V_2 - V_1)(3V_1 + 5V_2)$. Подставляя найденные выражения для $A_ц$ и $Q_п$ в формулу $\eta = A_ц/Q_п$, получаем КПД цикла в виде

$$\eta = \frac{V_2/V_1 - 1}{5\,V_2/V_1 + 3}.$$

Учитывая, что на параболическом участке исходного цикла $T = \beta V^2$, β – некоторый коэффициент, выразим отношение объемов как $V_2/V_1 = \sqrt{T_2/T_1}$. Окончательно получаем

$$\eta = \frac{\sqrt{T_2/T_1} - 1}{5\sqrt{T_2/T_1} + 3}.$$



4. (25 баллов) На горизонтальном столе лежит коробка длины L и массы m, в которой у одной из стенок находится шайба той же массы. Шайбе сообщают скорость V в направлении противоположной стенки (см. рис.). Считая, что соударения шайбы со стенками упругие, трение между шайбой и коробкой отсутствует, а коэффициент трения между коробкой и столом равен μ, найти пройденные коробкой и шайбой пути. Ускорение свободного падения равно g. Диаметр шайбы мал по сравнению с L.

Ответ. Путь, пройденный коробкой, равен $V^2/(4\mu g)$. Путь, пройденный шайбой, равен $(1 + n)L$, где n равно целой части отношения $V^2/(4\mu gL)$.

Решение. Известно, что при абсолютно упругом лобовом соударении тел равной массы происходит обмен тел скоростями (это следует из законов сохранения импульса и механической энергии). В данной задаче после достижения шайбой стенки коробки (правой на рисунке) и удара о нее шайба остановится, а коробка получит скорость V. Двигаясь далее под действием силы трения равнозамедленно, коробка может остановиться, пройдя расстояние, меньшее L. Если же коробка не остановится (трение слишком слабое), то произойдет соударение левой стенки коробки с шайбой. При этом коробка остановится, а шайба приобретет скорость коробки. Пройдя расстояние L, шайба «вернет» ту же скорость коробке, и равнозамедленное движение коробки возобновится. Таким образом, пройденный коробкой полный путь $S_к$ будет таким же, как при ее непрерывном замедленном движении под действием силы трения, равной $2\mu mg$. Чтобы найти этот путь, приравниваем изменение кинетической энергии работе силы трения

$$0 - \frac{mV^2}{2} = -2\mu mg S_{\text{к}}.$$

В результате получаем

$$S_{\text{к}} = \frac{V^2}{4\mu g}.$$

При нахождении пути шайбы $S_{\text{ш}}$ учтем, что каждое ее соударение с левой стенкой коробки добавляет к пути величину L. Число таких соударений n равно целой части отношения $S_{\text{к}}/L = V^2/(4\mu g L)$. Добавляя nL к первому перемещению шайбы от левой до правой стенки, получаем

$$S_{\text{ш}} = (1 + n)L.$$