ОЛИМПИАДА “БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ – БУДУЩЕЕ НАУКИ” 2022-2023
Физика, II тур

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

9 класс

1. (25 баллов) Тело бросили с начальной скоростью V_0 под углом α к горизонту. Через время τ бросили второе тело так, что оно полетело по той же траектории. Каким будет минимальное расстояние между телами во время их полета? Через какое время расстояние станет минимальным? Ускорение свободного падения равно g.

Ответ. Минимальное расстояние равно $V_0\tau\cos\alpha$ и достигается через время $\frac{\tau}{2}+\frac{V_0\sin\alpha}{g}$.

Решение. Введем оси x (горизонтальную) и y (вертикальную) из точки броска и запишем зависимости координат тел от времени t (отсчитываемого от броска первого тела) в виде

$$x_1 = V_0\cos\alpha\, t, \qquad y_1 = V_0\sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2},$$

$$x_2 = V_0\cos\alpha\,(t-\tau), \qquad y_2 = V_0\sin\alpha\,(t-\tau) - \frac{g(t-\tau)^2}{2}.$$

Расстояние между телами R определяется формулой

$$R = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},$$

где

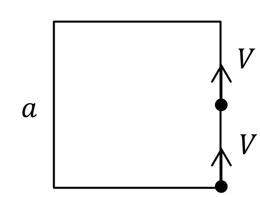
$$x_1-x_2 = V_0\tau\cos\alpha, \qquad y_1-y_2 = V_0\tau\sin\alpha - g\tau\left(t-\frac{\tau}{2}\right).$$

Поскольку разность x_1-x_2 не зависит от времени, то минимальное значение R достигается в момент, когда разность y_1-y_2 обращается в нуль (тела оказываются на одной высоте), т.е. при

$$t=\frac{\tau}{2}+\frac{V_0\sin\alpha}{g}.$$

В этот момент расстояние между телами равно $V_0\tau\cos\alpha$.

2. (25 баллов) Два жучка одновременно начинают движение со скоростью V по сторонам квадрата: один из вершины, другой с середины стороны (см. рис.). Через какое время расстояние между жучками достигнет минимального значения? Чему равно это значение? Длина стороны квадрата равна a.



Ответ. Минимальное расстояние равно $\frac{a}{2\sqrt{2}}$ и достигается через время $\frac{3a}{4V}$.

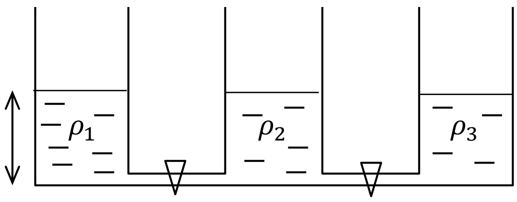
Решение. В начале движения расстояние между жучками остается постоянным. После того, как один из жучков (верхний на рисунке) достигнет вершины квадрата, расстояние между жучками начнет уменьшаться (верхний жучок станет двигаться в сторону, а не от второго жучка, как до этого). Уменьшение расстояния продолжится до момента, когда жучки расположатся симметрично относительно вершины – на одинаковом расстоянии $a/4$ от нее. Действительно, в этот момент проекции векторов скоростей жучков на соединяющую их линию окажутся одинаковыми, т.е. скорость сближения жучков обратится в нуль. Это и означает достижение минимума расстояния (сближение меняется на удаление). Расстояние L между жучками в указанный момент находим как гипотенузу прямоугольного треугольника

$$L=\sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2+\left(\frac{a}{4}\right)^2}=\frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

Время движения t до симметричного расположения жучков равно

$$t = \frac{3a}{4V}.$$

3. (25 баллов) Три одинаковых цилиндрических сосуда стоят рядом на горизонтальном столе и соединены вблизи дна тонкими трубками, которые перекрыты кранами (см. рис.). Сосуды заполнены до уровня h_0 жидкостями с плотностями ρ_1, ρ_2, ρ_3, причем $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$. В какой последовательности нужно открыть краны, чтобы получить максимальную высоту столба жидкости в одном из сосудов? Чему равна эта высота?



Ответ. Сначала нужно открыть кран между сосудами с жидкостями плотностей ρ_2 и ρ_3. Высота столба жидкости будет равна $\frac{h_0}{2}\left(\frac{11}{3} - \frac{\rho_3}{\rho_2} - \frac{\rho_2+\rho_3}{3\rho_1}\right)$.

Решение. Чтобы добиться максимального подъема уровня жидкости, нужно поднимать менее плотные жидкости. Следовательно, сначала нужно открыть кран между сосудами с жидкостями плотностей ρ_2 и ρ_3. При этом часть жидкости плотности ρ_2 перетечет в сосуд с жидкостью плотности ρ_3, подняв снизу весь столб наименее плотной жидкости. После открытия второго крана жидкость наибольшей плотности ρ_1 перетечет в соседние сосуды и поднимет снизу имеющиеся там столбы жидкостей. При этом в крайне правом на рисунке сосуде будет достигнут наибольший подъем уровня жидкости, а столб жидкости в этом сосуде будет состоять из жидкостей всех трех видов.

Для расчета высоты столба рассмотрим сначала ситуацию после открытия крана между сосудами с жидкостями плотностей ρ_2 и ρ_3. Запишем условие равенства давлений у дна этих сосудов в виде

$$\rho_2 h_2 = \rho_2 h_3 + \rho_3 h_0,$$

где h_2 и h_3 – высоты столбов жидкости с плотностью ρ_2 во втором и третьем сосудах. Учитывая, что $h_2 + h_3 = h_0$, находим, что

$$h_2 = \frac{h_0}{2}\left(1 + \frac{\rho_3}{\rho_2}\right), \quad h_3 = \frac{h_0}{2}\left(1 - \frac{\rho_3}{\rho_2}\right).$$

После открытия второго крана условия равенства давлений в сосудах можно записать как

$$\rho_1 h_1 = \rho_1 h_{12} + \rho_2 h_2, \quad \rho_1 h_1 = \rho_1 h_{13} + \rho_2 h_3 + \rho_3 h_0,$$

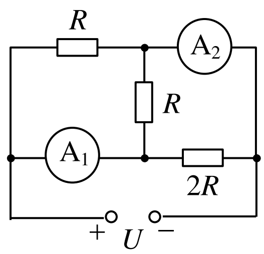
где через h_{12} и h_{13} обозначены высоты столбов жидкости плотности ρ_1 во втором и третьем сосудах соответственно. Учитывая также, что $h_1 + h_{12} + h_{13} = h_0$, находим

$$h_1 = \frac{h_0}{3}\left(1 + \frac{\rho_2 + \rho_3}{\rho_1}\right), \quad h_{12} = h_{13} = \frac{h_0}{3}\left(1 - \frac{\rho_2 + \rho_3}{2\rho_1}\right).$$

Полная высота столба в третьем сосуде будет равна

$$H_3 = h_{13} + h_3 + h_0 = \frac{h_0}{2}\left(\frac{11}{3} - \frac{\rho_3}{\rho_2} - \frac{\rho_2 + \rho_3}{3\rho_1}\right).$$

4. (25 баллов) Цепь, составленная из резисторов с сопротивлениями R и $2R$ и амперметров с пренебрежимо малыми сопротивлениями, подключена к источнику с напряжением U (см. рис.). Найти показания амперметров.



Ответ. Амперметр A_1 показывает ток $1{,}5U/R$, амперметр A_2 показывает $2U/R$.

Решение. Поскольку сопротивления амперметров пренебрежимо малы, можно считать, что напряжение источника подводится к каждому из трех резисторов. Следовательно, токи через резисторы с сопротивлениями R равны U/R, а ток через резистор с сопротивлением $2R$ равен $U/(2R)$. Ток через средний резистор течет вверх. При этом ток через A_1 равен сумме токов через средний и правый нижний резисторы, т.е. $3U/(2R)$, а ток через A_2 равен сумме токов через средний и левый верхний резисторы, т.е. $2U/R$.